ANDRÉ KOCH TORRES ASSIS

MECÂNICA RELACIONAL

CENTRO DE LÓGICA, EPISTEMOLOGIA
E HISTÓRIA DA CIÊNCIA – UNICAMP

COLEÇÃO CLE

COLEÇÃO CLE

CENTRO DE LÓGICA, EPISTEMOLOGIA
E HISTÓRIA DA CIÊNCIA – UNICAMP

MECÂNICA RELACIONAL

ANDRÉ KOCH TORRES ASSIS

MECÂNICA RELACIONAL

VOLUME 22 – 1998
COLEÇÃO CLE

ISSN: 0103-3147
Primeira Edição, 1998

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca do CLE

Assis, André Koch Torres
As76m Mecânica Relacional / André Koch Torres Assis. – Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1998.
(Coleção CLE; v. 22)

ISBN 85-86497-01-0

1. Mecânica. 2. Gravitação. 3. Inércia (Mecânica). I. Título. II. Série.

19. CDD 531
531.14
531.2

Índice para catálogo sistemático

1. Mecânica	531
2. Gravitação	531.14
3. Inércia (Mecânica)	531.2

Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência
Cidade Universitária "Zeferino Vaz" – C.P. 6133 – 13081-970 – Campinas, SP.
e-mail: CLEHC@TURING.UNICAMP.BR

IMPRESSO NO BRASIL

Dedicado à memória de Isaac Newton, que indicou o caminho para as gerações passadas, presentes e futuras.

Sumário

Parte I
Mundo Velho

Parte II

Mundo Novo

Agradecimentos

Aos alunos de graduação e de pós-graduação que seguiram meus cursos sobre a Mecânica Relacional, o Princípio de Mach, a Eletrodinâmica de Weber e sobre Cosmologia, pelas muitas sugestões construtivas que apresentaram. Aos meus alunos de iniciação científica, de mestrado e de doutorado que estão desenvolvendo pesquisas nestas áreas. Dei uma primeira versão deste trabalho a algumas pessoas: Drs. Roberto de A. Martins, Marcelo de A. Bueno, Werner M. Vieira, Márcio A. de Faria Rosa, Arden Zylbersztajn, Domingos S. L. Soares, Jorge I. Cisneros e Haroldo C. Velho. As sugestões e idéias que recebi contribuiram bastante para o aprimoramento do livro. Agradeço também a todos os outros amigos que têm me ajudado de diversas formas a continuar este trabalho.

Ao Center for Electromagnetics Research, Northeastern University (Boston, USA), que me recebeu por um ano, no qual tive a primeira idéia de escrever este livro, e onde discuti seu conteúdo com alguns colegas. Aos Institutos de Física e de Matemática e ao Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, da Unicamp, que deram o apoio necessário para a realização deste trabalho.

E acima de tudo, aos meus pais, a minha esposa e aos meus filhos que me fizeram crescer como um ser humano.

Prefácio

Este livro apresenta a Mecânica Relacional. Esta é uma nova mecânica que implementa as idéias de Leibniz, Berkeley, Mach e muitos outros. A mecânica relacional é baseada apenas em grandezas relativas, como a distância entre corpos materiais, a velocidade radial e a aceleração radial entre eles. Com ela espera-se responder a questões não esclarecidas suficientemente tanto pela mecânica clássica de Newton, como pelas teorias da relatividade especial e geral de Einstein. Nesta nova mecânica não aparecem os conceitos de espaço absoluto, de tempo absoluto e nem de movimento absoluto. O mesmo pode ser dito da inércia, da massa inercial e dos sistemas inerciais de referência. Apenas quando comparamos esta nova mecânica com a newtoniana passamos a ter uma compreensão clara destes conceitos antigos. A mecânica relacional é uma implementação quantitativa das idéias de Mach utilizando uma força de Weber para a gravitação. Muitas pessoas ajudaram neste desenvolvimento, entre elas o próprio Weber, Neumann, Helmholtz e Erwin Schrödinger.

Este livro tem como objetivo apresentar as propriedades e características desta nova visão da mecânica. Assim, pode ser vista de maneira completa e fica fácil fazer uma comparação com as visões anteriores do mundo (newtoniana e einsteiniana).

Uma grande ênfase é dada para a experiência do balde de Newton, que é uma das experiências mais simples já realizadas na física. Apesar deste fato, nenhuma outra experiência teve conseqüências tão amplas e profundas sobre os fundamentos da mecânica. Colocamos no mesmo nível a descoberta experimental de Galileo, da igualdade de aceleração dos corpos em queda livre. A explicação destes dois fatos, sem utilizar os conceitos de espaço absoluto ou de inércia, é um dos maiores feitos da mecânica relacional.

Para mostrar todo seu poder e para analisá-la em perspectiva, inicialmente apresentamos a mecânica newtoniana e as teorias da relatividade de Einstein. Discutimos as críticas à teoria newtoniana apresentadas por Leibniz, Berkeley e Mach. Depois disto, introduzimos a mecânica relacional e mostramos como ela resolve quantitativamente todos estes problemas com uma clareza e simplicidade

sem igual, quando comparada com qualquer outro modelo. Também apresentamos em detalhes a história da mecânica relacional, enfatizando as conquistas e limitações dos principais trabalhos anteriores relacionados a ela. Além disto, apresentamos diversos aspectos que vão além da teoria newtoniana, como: a precessão do periélio dos planetas, a anisotropia da massa inercial efetiva, a mecânica adequada para partículas movendo-se a altas velocidades, etc. Também são apresentados testes experimentais da mecânica relacional.

Este livro é direcionado a físicos, matemáticos, engenheiros, filósofos e historiadores da ciência. É voltado também aos professores de física que atuam a nível de universidade, de segundo grau e de cursinho, assim como a seus estudantes, pois todos que já aprenderam ou ensinaram a mecânica newtoniana conhecem as dificuldades e sutilezas de seus conceitos básicos (referencial inercial, força centrífuga fictícia, etc.) Acima de tudo, é escrito para as pessoas jovens e sem preconceitos que têm um interesse nas questões fundamentais da física, a saber: Há um movimento absoluto de qualquer corpo em relação ao espaço ou apenas movimentos relativos entre corpos materiais? Podemos provar experimentalmente que um corpo está acelerado em relação ao espaço ou apenas em relação a outros corpos? Qual é o significado da inércia? Por que dois corpos de pesos, formas e composições químicas diferentes caem com a mesma aceleração no vácuo sobre a superfície da Terra? Quando Newton girou o balde e viu a água subindo pelas suas paredes, qual foi o agente responsável por este efeito? Esta elevação se deve à rotação da água em relação a quê? O que achata a Terra nos pólos devido à sua rotação diurna? Este achatamento é devido à rotação da Terra em relação ao espaço vazio ou em relação às estrelas e galáxias distantes? Apresentamos a resposta a todas estas questões sob o ponto de vista da mecânica relacional.

Uma versão em inglês deste livro vai ser publicada sob o título *Relational Mechanics*. Uma versão mais didática deste livro, em português, sem a maior parte do conteúdo matemático, vai ser publicada sob o título *Uma Nova Física*.

Após compreender a mecânica relacional entramos num novo mundo, enxergando os mesmos fenômenos com olhos diferentes e sob uma

nova perspectiva. É uma mudança de paradigma, termo cunhado por Kuhn em seu importante trabalho [Kuhn82].

Neste livro, empregamos o Sistema Internacional de Unidades MKSA. Quando definimos qualquer grandeza ou conceito físico utilizamos "≡" como símbolo de definição.

André Koch Torres Assis*

***Endereço:** Instituto de Física, UNICAMP, 13083-970 Campinas, S.P.
e-mail: assis@if i.unicamp.br – **home-page:** http://www.if i.unicamp.br/∼assis

Parte I

Mundo Velho

Capítulo 1

Mecânica Newtoniana

1.1 Introdução

O ramo do conhecimento que trata do equilíbrio e do movimento dos corpos é chamado de mecânica. Nos últimos trezentos anos esta área da física tem sido ensinada baseada no trabalho de Isaac Newton (1642-1727). Seu livro principal é *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, usualmente conhecido por seu primeiro nome em latim, *Principia*, [New34]. Este livro foi publicado originalmente em 1687. Ele está dividido em três partes, Livros I, II e III. O Livro I já está traduzido para o português: [New90]. Quando citarmos as palavras de Newton deste livro usaremos esta tradução. As traduções das outras partes são nossas. O segundo grande livro de Newton é *Óptica*, publicado originalmente em 1704 (ao contrário do *Principia*, escrito em latim, o *Óptica* foi escrito em inglês). O *Óptica* já se encontra totalmente traduzido para o português: [New96]. Usaremos esta tradução quando citarmos as palavras de Newton tiradas deste livro. Uma comparação entre o *Principia* de Newton e a obra anterior *Principia Philosophiae* de Descartes se encontra em [BX89].

A mecânica newtoniana como apresentada no *Principia* é baseada nos conceitos de espaço, tempo, velocidade, aceleração, peso, massa, força, etc. Na próxima Seção apresentamos esta formulação.

Sempre houve uma grande discussão entre os filósofos e cientistas muito antes de Newton sobre a distinção entre movimento absoluto e relativo. Para uma discussão clara de todo este assunto com muitas citações dos textos originais, ver o livro importante de Julian Barbour, *Absolute or Relative Motion?*, [Bar89]. Em português pode-se ver também os livros de Fátima Évora, [Evo88] e [Evo94]. Em nosso livro consideramos apenas Newton e os que se seguiram a ele. O motivo para isto é o sucesso impressionante obtido pela mecânica newtoniana e o novo padrão introduzido por Newton em toda esta discussão, com seus argumentos dinâmicos para defender o movi-

mento absoluto. Podemos citar, em especial, sua famosa experiência do balde. Este é um dos temas principais deste livro.

1.2 Mecânica Newtoniana

O *Principia* começa com oito definições, [New90]. A primeira definição é a de quantidade de matéria, grandeza que hoje em dia chamamos de massa inercial do corpo. Newton a definiu como o produto da densidade do corpo pelo volume que ele ocupa:

> *Definição I: A quantidade de matéria é a medida da mesma, obtida conjuntamente a partir de sua densidade e volume.*
>
> Assim, o ar com o dobro de densidade, num espaço duplicado, tem o quádruplo da quantidade; num espaço triplicado, o sêxtuplo da quantidade. O mesmo deve ser entendido com respeito a neve, e pó fino ou matéria pulverizada, condensados por compressão ou liquefação, bem como para todos os corpos que, por quaisquer causas, são condensados diferentemente. Não me refiro, aqui, a um meio, se é possível dizer que tal meio existe, que permeia livremente os interstícios entre as partes dos corpos. É essa quantidade que doravante sempre denominarei pelo nome de corpo ou massa. A qual é conhecida através do peso de cada corpo, pois é proporcional ao peso, como encontrei com experimentos com pêndulos, realizados muito rigorosamente, os quais serão mostrados mais adiante.

Representando a quantidade de matéria (a massa inercial) de um corpo por m_i, sua densidade por ρ e seu volume por V, temos então:

$$m_i \equiv \rho V \ . \tag{1.1}$$

Mais tarde vamos discutir em detalhes a proporcionalidade entre a massa e o peso dos corpos, assim como os experimentos de Newton sobre este assunto. Por hora, é importante ressaltar aqui, que com esta proporcionalidade, Newton encontrou uma maneira operacional

precisa de determinar a massa de qualquer corpo, bastando, para isto, pesá-lo.

Depois, Newton define a quantidade de movimento pelo produto da quantidade de matéria com a velocidade do corpo:

> *Definição II: A quantidade de movimento é a medida do mesmo, obtida conjuntamente a partir da velocidade e da quantidade de matéria.*
>
> O movimento do todo é a soma dos movimentos de todas as partes; portanto, em um corpo com o dobro da quantidade, com a mesma velocidade, o movimento é duplo; com o dobro da velocidade, é quádruplo.

Representando a velocidade vetorial por $\vec{v}$ e a quantidade de movimento por $\vec{p}$ temos:

$$\vec{p} \equiv m_i \vec{v} \ .$$

Newton, então, define a *vis insita*, ou força inata da matéria, ou força de inatividade, ou inércia como "um poder de resistir, através do qual todo o corpo, estando em um determinado estado, mantém esse estado, seja ele de repouso ou de movimento uniforme em linha reta." Sua quarta definição é a de força imprimida: "ação exercida sobre um corpo, a fim de alterar seu estado, seja de repouso, ou de movimento uniforme em uma linha reta." Vêm, então, as definições de força centrípeta, de quantidade absoluta de uma força centrípeta, de quantidade acelerativa de uma força centrípeta e de quantidade motora de uma força centrípeta.

Após estas definições há um Escólio com as definições de tempo absoluto, espaço absoluto e movimento absoluto. Para uma discussão sobre este assunto ver [Bar93]. Citamos as partes principais das definições de Newton:

> Até aqui estabeleci as definições dos termos acima do modo como eles são menos conhecidos e expliquei o sentido no qual eles devem ser entendidos no que segue. Não defino tempo, espaço, lugar e movimento, por serem bem

conhecidos de todos. Contudo, observo que o leigo não concebe essas quantidades sob outras noções exceto a partir das relações que elas guardam com os objetos perceptíveis. Daí surgem certos preconceitos, para a remoção dos quais será conveniente distingui-las entre absolutas e relativas, verdadeiras e aparentes, matemáticas e comuns.

I - O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e da sua própria natureza, flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa e é também chamado de duração; o tempo relativo, aparente e comum é alguma medida de duração perceptível e externa (seja ela exata ou não uniforme) que é obtida através do movimento e que é normalmente usada no lugar do tempo verdadeiro, tal como uma hora, um dia, um mês, um ano.

II - O espaço absoluto, em sua própria natureza, sem relação com qualquer coisa externa, permanece sempre similar e imóvel. Espaço relativo é alguma dimensão ou medida móvel dos espaços absolutos, a qual nossos sentidos determinam por sua posição com relação aos corpos, e é comumente tomado por espaço imóvel; assim é a dimensão de um espaço subterrâneo, aéreo ou celeste, determinado pela sua posição com relação a Terra. Espaços absoluto e relativo são os mesmos em configuração e magnitude, mas não permanecem sempre numericamente iguais. Pois, por exemplo, se a Terra se move, um espaço de nosso ar, o qual relativamente a Terra permanece sempre o mesmo, em um dado tempo será uma parte do espaço absoluto pela qual passa o ar, em um outro tempo será outra parte do mesmo, e assim, entendido de maneira absoluta, será continuamente mudado.

III - Lugar é uma parte do espaço que um corpo ocupa, e de acordo com o espaço, é ou absoluto ou relativo. (...)

IV - Movimento absoluto é a translação de um corpo de um lugar absoluto para outro; e movimento relativo, a translação de um lugar relativo para outro. (...)

A seguir, Newton apresenta seus três "Axiomas ou leis do movimento":

> Lei I: Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele.
>
> Lei II: A mudança de movimento é proporcional a força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida.
>
> Lei III: A toda ação há sempre oposta uma reação igual, ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas.
>
> Corolário I: Um corpo, submetido a duas forças simultaneamente, descreverá a diagonal de um paralelogramo no mesmo tempo em que ele descreveria os lados pela ação daquelas forças separadamente.
>
> (...)
>
> Corolário V: O movimento de corpos encerrados em um dado espaço são os mesmos entre si, esteja esse espaço em repouso, ou se movendo uniformemente em uma linha reta sem qualquer movimento circular.
>
> (...)

Sua primeira lei do movimento é usualmente chamada de lei da inércia.

Sua segunda lei do movimento pode ser escrita como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}) \ . \tag{1.2}$$

Aqui chamamos de $\vec{F}$ a força resultante agindo sobre o corpo. Se a massa inercial m_i é constante, então esta lei pode ser colocada na forma simples e bem conhecida dada por:

$$\vec{F} = m_i\vec{a} \ , \tag{1.3}$$

onde $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ é a aceleração do corpo.

Boa parte dos problemas da mecânica clássica podem ser resolvidos por esta equação. Alguns problemas especiais necessitam da utilização da Eq. (1.2), tais como: um foguete queimando combustível e ejetando gases, um caminhão que vai perdendo areia, etc. Estes problemas de massa variável também podem ser resolvidos pela Eq. (1.3) desde que se considere separadamente cada um dos componentes do problema (o foguete e os gases ejetados, ou caminhão e a areia perdida, etc.) Pode-se considerar então que a Eq. (1.3) é a base fundamental da mecânica newtoniana.

Sua terceira lei do movimento é chamada de lei de ação e reação. Representando a força exercida por um corpo A sobre um outro corpo B por $\vec{F}_{AB}$ e a força exercida por B sobre A por $\vec{F}_{BA}$ a terceira lei afirma que:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \ .$$

Sempre que Newton utilizou a terceira lei, as forças entre os corpos estavam direcionadas ao longo da linha reta que os une, como na lei da gravitação.

Seu primeiro corolário é chamado de lei do paralelogramo das forças.

Seu quinto corolário introduz o conceito de referenciais inerciais, isto é, sistemas de referência que se movem com uma velocidade constante em relação ao espaço absoluto.

Na Seção XII do Livro I do *Principia* Newton provou dois teoremas extremamente importantes relacionados com a força exercida por uma casca esférica sobre corpos pontuais internos e externos, supondo forças que caem com o quadrado da distância (como é o caso da força gravitacional de Newton ou da força eletrostática de Coulomb):

> *Seção XII: As forças atrativas de corpos esféricos*
>
> Proposição 70. Teorema 30: Se para cada ponto de uma superfície esférica tenderem forças centrípetas iguais, que diminuem com o quadrado das distâncias a partir desses

> pontos, afirmo que um corpúsculo localizado dentro daquela superfície não será atraído de maneira alguma por aquelas forças.

Isto é, se um corpo está localizado em qualquer lugar no interior da casca esférica (e não apenas sobre seu centro), a força resultante exercida por toda a casca sobre ele é nula.

> Proposição 71. Teorema 31: Supondo-se o mesmo que acima, afirmo que um corpúsculo localizado fora da superfície esférica é atraído em direção ao centro da esfera com uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância até este centro.

Isto é, um corpo colocado fora da casca esférica é atraído como se a casca estivesse concentrada em seu centro.

No terceiro livro do *Principia* Newton apresentou sua lei da gravitação universal. Esta pode ser expressa como: cada partícula de matéria atrai qualquer outra partícula com uma força variando diretamente como o produto de suas massas gravitacionais e inversamente como o quadrado da distância entre elas.

Em nenhum lugar do *Principia* Newton expressou a lei gravitacional desta forma. Mas podemos encontrar afirmações similares a esta nas seguintes passagens do *Principia*: Livro I, Props. 72 a 75 e Prop. 76, especialmente Corolários I a IV; Livro III, Props. 7 e 8 e no Escólio Geral ao fim do Livro III. Por exemplo, no Livro I, Prop. 76, Cors. I a IV lemos, referindo-se a esferas com uma distribuição isotrópica de matéria, densidades como $\rho_1(r)$ e $\rho_2(r)$, nas quais cada ponto atrai com uma força que cai com o quadrado da distância:

> Cor. I. Assim, se muitas esferas deste tipo, semelhantes em todos os aspectos, atraem-se mutuamente, as atrações acelerativas de qualquer uma com relação as outras, a quaisquer distâncias dos centros, serão como as esferas atrativas.
>
> Cor. II. E; a quaisquer distâncias desiguais, serão como as esferas atrativas divididas pelos quadrados das distâncias entre os centros.

> Cor. III. As atrações motoras, ou os pesos das esferas uma em direção a outra, a iguais distâncias dos centros, serão conjuntamente como as esferas atrativa e atraída; isto é, como os produtos resultantes da multiplicação das esferas uma pela outra.
>
> Cor. IV. E, a distâncias desiguais, serão diretamente como aqueles produtos e inversamente como o quadrado das distâncias entre os centros.

A Proposição 7 do Livro III afirma:

> *Há um poder de gravidade pertencendo a todos os corpos, proporcional às várias quantidades de matéria que eles contêm.*
>
> Que todos os planetas gravitam uns em direção aos outros, já provamos anteriormente; assim como [já provamos] que a força de gravidade em direção a qualquer um deles, considerada separadamente, é inversamente como o quadrado da distância dos lugares a partir do centro do planeta. E, portanto, (pela Prop. 69, Livro I e seus Corolários) segue-se que a gravidade tendendo em direção a todos os planetas é proporcional à matéria que eles contêm.
>
> Além disso, como todas as partes de qualquer planeta A gravitam em direção a qualquer outro planeta B e a gravidade de toda parte está para a gravidade do todo como a matéria da parte está para a matéria do todo e (pela Lei III) como a cada ação corresponde uma reação; portanto, o planeta B vai, por outro lado, gravitar em direção a todas as partes do planeta A e sua gravidade em direção a qualquer uma das partes estará para a gravidade em direção ao todo como a matéria da parte está para a matéria do todo. *Q. E. D.*

Este último parágrafo é muito importante. Ele mostra o papel fundamental da lei de ação e reação na derivação do fato de que a força da gravidade é proporcional ao produto das massas dos dois

corpos (e não, por exemplo, proporcional à soma das massas, ou ao produto das massas elevado ao quadrado). Para uma discussão detalhada e crítica dos argumentos de Newton para chegar na lei de gravitação ver [Fre89].

No Escólio Geral no final do livro lemos:

> Até aqui explicamos os fenômenos dos céus e do nosso mar pelo poder da gravidade, mas ainda não designamos a causa deste poder. Isto é certo, que ele tem de proceder de uma causa que penetra até os centros do Sol e dos planetas, sem sofrer a menor diminuição de sua força; que opera não de acordo com a quantidade das superfícies das partículas sobre as quais ele age (como as causas mecânicas costumam agir), mas de acordo com a quantidade de matéria sólida que eles contêm e propaga sua virtude por todos os lados até distâncias imensas, sempre diminuindo com o inverso do quadrado das distâncias.

No *Sistema do Mundo* escrito por Newton, publicado pela primeira vez em 1728, também podemos ver a importância da lei de ação e reação para a derivação do fato de que a força gravitacional é proporcional ao produto das massas. Citamos aqui a Seção 20, pág. 568 de [New34], logo após a Seção onde Newton discutiu as experiências com o pêndulo que mostraram a proporcionalidade entre o peso e a massa inercial:

> Como a ação da força centrípeta sobre os corpos atraídos é, a distâncias iguais, proporcional às quantidades de matéria nestes corpos, a razão exige que ela também deva ser proporcional à quantidade de matéria no corpo [que está] atraindo.
>
> Pois toda ação é mútua e (pela terceira lei do movimento) faz com que os corpos se aproximem um ao outro e, portanto, tem de ser a mesma em ambos os corpos. É ver dade que podemos considerar um corpo como atraindo e um outro como sendo atraído; mas esta distinção é mais matemática do que natural. A atração reside realmente em

> cada corpo em direção ao outro e é, portanto, da mesma natureza em ambos.

Algebricamente sua lei de gravitação pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r^2}\hat{r} \ . \tag{1.4}$$

Nesta equação $\vec{F}_{21}$ é a força exercida pela partícula material 2 sobre a partícula material 1, G é uma constante de proporcionalidade, m_{g1} e m_{g2} são as massas gravitacionais das partículas 1 e 2, r é a distância entre elas e $\hat{r}$ é o vetor unitário apontando de 2 para 1, ver Figura 1.1.

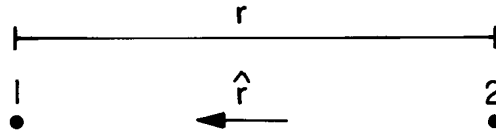



Figura 1.1: Dois corpos separados por uma distância r.

Estamos chamando aqui as massas que aparecem na Eq. (1.4) de "massas gravitacionais," para distingui-las das "massas inerciais" que aparecem na segunda lei do movimento de Newton, Eqs. (1.2) e (1.3). As massas gravitacionais também poderiam ser chamadas de "cargas gravitacionais," como preferem alguns autores, em função da grande analogia que há entre elas e as cargas elétricas. As cargas elétricas geram e sentem forças elétricas, enquanto que as massas gravitacionais geram e sentem forças gravitacionais. Neste sentido, e observando a forma das forças gravitacional de Newton e eletrostática de Coulomb, as massas gravitacionais têm uma analogia muito maior com as cargas elétricas do que com as massas inerciais. Discutiremos isto em mais detalhes depois.

Utilizando a lei de Newton da gravitação universal, Eq. (1.4) e seus teoremas apresentados acima, encontramos que um corpo esfericamente simétrico atrairá um corpo externo como se toda sua massa

gravitacional estivesse no centro da esfera. No caso da Terra, desprezando os pequenos efeitos devido a ela não ser exatamente esférica, vem:

$$\vec{F} = -G\frac{M_{gt}m_g}{r^2}\hat{r} \ ,$$

onde M_{gt} é a massa gravitacional da Terra e $\hat{r}$ aponta radialmente para fora. Esta força é usualmente chamada de peso do corpo e é representada por $\vec{P}$:

$$\vec{P} = m_g\vec{g} \ , \tag{1.5}$$

onde

$$\vec{g} = -\frac{GM_{gt}}{r^2}\hat{r} \ .$$

Aqui $\vec{g}$ é chamado de campo gravitacional da Terra. Ele é a aceleração radial para baixo de corpos caindo livremente no vácuo, como veremos depois. Se estamos perto da superfície terrestre então $r \approx R_t$, onde R_t é o raio da Terra. Próximo da superfície terrestre o valor medido desta aceleração é: $g = |\vec{g}| \approx GM_{gt}/R_t^2 \approx 9,8 \ m/s^2$.

Ao realizar experiências com pêndulos, Newton obteve que as massas inerciais e gravitacionais são proporcionais ou iguais uma a outra. Ele expressou isto como uma proporcionalidade entre matéria (m_i) e peso (P $= m_g|\vec{g}|$) na Proposição 6 do Livro III do *Principia*:

> Que todos os corpos gravitam em direção a cada planeta e que os pesos dos corpos em direção a qualquer planeta, a distâncias iguais do centro do planeta, são proporcionais às quantidades de matéria que eles contêm.

As Proposições 70 e 71 do *Principia* dadas acima são apresentadas hoje em dia como segue: Temos uma casca esférica de massa

gravitacional M_g e raio R centrada em O, Figura 1.2.

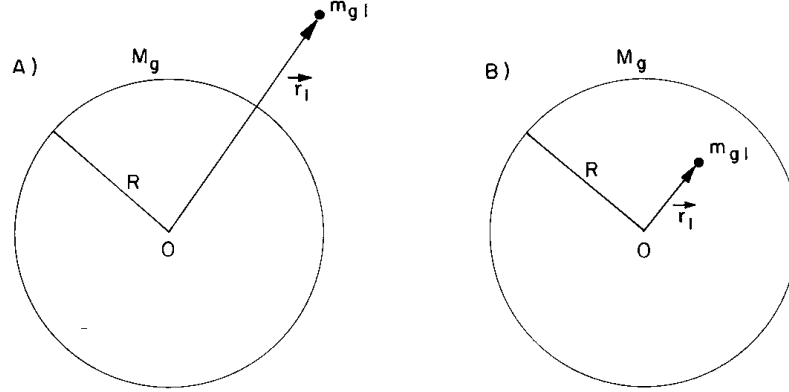



Figura 1.2: Casca esférica.

Um elemento de massa gravitacional dm_{g2} localizado em $\vec{r}_2$ sobre esta casca esférica é dado por $dm_{g2} = \sigma_{g2} da_2 = \sigma_{g2} R^2 d\Omega_2 = \sigma_{g2} R^2 \sin\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2$, onde $\sigma_{g2} = M_g/4\pi R^2$ é a densidade de massa gravitacional distribuída uniformemente sobre a superfície da casca, $d\Omega_2$ é o elemento de ângulo esférico, θ_2 e φ_2 são os ângulos usuais em coordenadas esféricas, θ_2 variando de 0 a π e φ_2 de 0 a 2π. A força gravitacional exercida por este elemento de massa gravitacional sobre uma partícula teste m_{g1} localizada em $\vec{r}_1$ é dada pela Eq. (1.4):

$$d\vec{F}_{21} = -G\frac{m_{g1}dm_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \ ,$$

onde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$ e $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$. Integrando esta equação obtemos, com $r_1 = |\vec{r}_1|$:

$$\vec{F} = \left\{ \begin{array}{ll} -GM_g m_{g1}\hat{r}_1/r_1^2 \ , & \text{se } r_1 > R \\ 0 \ , & \text{se } r_1 < R \end{array} \right\} . \tag{1.6}$$

Isto é, se a partícula teste está fora da casca esférica ela será atraída como se toda a casca estivesse concentrada sobre O, enquanto que se

a partícula teste está em qualquer lugar no interior da casca ela não vai sentir qualquer força gravitacional resultante.

Hoje em dia estes resultados são provados facilmente utilizando a lei ou teorema de Gauss. A força exercida por várias massas em m_g localizada em $\vec{r}$ pode ser escrita como: $\vec{F} = m_g \vec{g}$, onde $\vec{g}$ é o campo gravitacional em $\vec{r}$ devido a todas as outras massas. O teorema de Gauss aplicado ao campo gravitacional afirma que o fluxo de $\vec{g}$ sobre uma superfície fechada S é dado por $-4\pi G M_{int}^g$, onde M_{int}^g é a massa gravitacional interna a S:

$$\oiint_S \vec{g} \cdot d\vec{a} = -4\pi G M_{int}^g \ .$$

O teorema de Gauss é válido para qualquer campo radial que cai como $1/r^2$, como é o caso da lei de Newton para a gravitação. Vamos calcular o campo gravitacional de uma casca esférica de massa gravitacional M_g e raio R centrada na origem O de um sistema de coordenadas. Por motivo de simetria o campo gravitacional devido a esta casca esférica só pode ser radial. Isto é: $\vec{g} = g(r)\hat{r}$. Consideramos agora uma superfície S centrada em O e com um raio $r > R$. O elemento de área desta casca esférica é $d\vec{a} = r^2 d\Omega \hat{r}$, onde $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ é o elemento de ângulo esférico. Utilizando o teorema de Gauss obtemos:

$$g 4\pi r^2 = -4\pi G M_g \ ,$$

de tal forma que: $\vec{g}(r > R) = -G M_g \hat{r}/r^2$.

Se tivéssemos integrado em uma superfície S tal que $r < R$, então $M_{int}^g = 0$, de tal forma que chegaríamos a: $\vec{g}(r < R) = 0$. Com estes resultados obtemos a Eq. (1.6).

Newton estava perfeitamente ciente das implicações cosmológicas de sua Proposição 70, Teorema 30 (a força gravitacional resultante sobre um corpo de prova localizado em qualquer lugar no interior de uma casca esférica é nula). A principal implicação é que podemos essencialmente desprezar a influência gravitacional das estrelas fixas nos movimentos planetários e em experiências realizadas sobre a Terra. O motivo para isto é que as estrelas estão espalhadas mais ou menos por todas as direções do céu (desprezando aqui a concentração

de estrelas na Via Láctea). Ele expressou isto claramente no segundo Corolário da Proposição 14, Teorema 14 (Os afélios e nós das órbitas dos planetas são fixos), do Livro III do *Principia*:

> Cor. I. As estrelas fixas são imóveis, observando que elas mantêm a mesma posição em relação aos afélios e nós dos planetas.
>
> Cor. II. E como estas estrelas não estão sujeitas a qualquer paralaxe perceptível devido ao movimento anual da Terra, elas não podem ter força, devido a suas distâncias imensas, para produzir qualquer efeito perceptível em nosso sistema. Sem mencionar que as estrelas fixas, estando dispersas promiscuamente por todo o céu, destroem suas ações mútuas devido a suas atrações contrárias, pela Prop. 70, Livro I.

Newton discutiu em maiores detalhes a grande distância das estrelas fixas ao sistema solar na Seção 57 do *Sistema do Mundo*, ver págs. 596-7 de [New34].

Em geral se menciona nos livros-texto que a constante gravitacional G foi medida por H. Cavendish (1731-1810) em 1798 com sua experiência com a balança de torção. Na verdade, Newton e Cavendish não escreveram a força gravitacional com a constante G, como dado na Eq. (1.4). Aliás, eles nunca mencionaram a constante G.
O artigo de Cavendish se chama "Experiências para determinar a densidade da Terra," [Cav98]. O que ele obteve é que a densidade média da Terra é $(5,998 \pm 0,033)$ vezes maior que a densidade da água (Cavendish deu 5,48 devido a um erro de seus cálculos corrigido por A. S. Mackenzie que reimprimiu seu trabalho em 1899, ver [Cav98], Gravitation, Heat and X-Rays, págs. 100-101 e 143). Para uma discussão de seu trabalho ver [Clo87].

Vamos então explicar a afirmação de que ele mediu G. Considerando a Terra como exatamente esférica, a força que ela exerce sobre uma partícula material de massa gravitacional m_g próxima da superfície utilizando a Eq. (1.4) é dada por $P = GM_{gt}m_g/R_t^2 = m_g g$.
A quantidade de matéria da Terra é dada por sua massa inercial M_{it}=$\rho_t \times V_t$=$\rho_t \times 4\pi R_t^3/3$, onde ρ_t é sua densidade média, V_t seu

volume e R_t seu raio. Newton obteve experimentalmente que a quantidade de matéria é proporcional ao peso. Empregamos este fato aqui como uma proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais, sendo a constante de proporcionalidade igual a 1: $M_{it} = M_{gt} = M_t$. Com isto obtemos então $G = gR_t^2/M_{gt} = gR_t^2/M_{it} = 3g/4\pi R_t \rho_t$. O campo gravitacional terrestre g próximo de sua superfície tem o mesmo valor que a aceleração de queda livre. No sistema de unidades MKSA vem: $g \approx 9,8\ m/s^2$ e $R_t = 6,4 \times 10^6\ m$. Com a medida de Cavendish obtemos $\rho_t = 5,448 \times 10^3\ kg/m^3$ e $M_t = 6 \times 10^{24}\ kg$, onde utilizamos que a densidade da água é dada por $\rho_{água} = 1\ g/cm^3 = 10^3\ kg/m^3$. Com este valor de ρ_t na expressão anterior para G obtemos: $G = 6,7 \times 10^{-8}\ cm^3/gs^2 = 6,7 \times 10^{-11}\ m^3/kgs^2$. O valor obtido das tabelas modernas dá $G = 6,67 \times 10^{-11}\ m^3/kgs^2$, o que mostra que a medida de Cavendish da densidade média terrestre foi bem acurada.

Vemos então que o valor de G depende não apenas dos sistemas de unidades mas também da escolha da constante de proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais. Se tivéssemos escolhido $M_{it} = \alpha M_{gt}$, sendo α uma constante que pode até mesmo ter dimensões, então o valor e as dimensões de G teriam de mudar concomitantemente (como obtido facilmente seguindo o procedimento acima) para: $G = \alpha^2 \times (6,7 \times 10^{-11}\ m^3/kgs^2)$. Mas isto não afetaria os resultados e as previsões de quaisquer experiências. Escolher $\alpha = 1$ é simplesmente uma questão de convenção e isto fornece o valor usual de G.

Deve ser enfatizado que Newton tinha uma idéia muito boa da densidade média da Terra 100 anos antes de Cavendish. Por exemplo, na Proposição 10 do Livro III do *Principia* ele disse:

> Mas que o nosso globo da Terra é de uma densidade maior do que seria se ele todo consistisse apenas de água, assim compreendi: Se tudo consistisse apenas de água,qualquer coisa que tivesse uma densidade menor do que a água emergiria e flutuaria em cima, devido a sua gravidade específica menor. E por causa disto, se um globo de matéria terrestre, coberto por todos os lados com água, fosse menos denso do que a água, ele emergiria em algum lugar e

> a água retrocedendo se juntaria no lado oposto. E tal é a condição de nossa Terra, que é coberta em grande parte por mares. A Terra, não fosse por sua maior densidade, emergiria dos mares e, de acordo com seu grau de leveza, subiria mais ou menos sobre sua superfície, a água dos mares fluindo para trás em direção ao lado oposto. Pelo mesmo motivo, as manchas solares, que flutuam sobre sua matéria lúcida, são mais leves do que esta matéria; e, qualquer que tenha sido a maneira como os planetas foram formados enquanto eles eram massas fluídas, toda a matéria mais pesada afundou para o centro. Como, portanto, a matéria comum de nossa Terra sobre sua superfície é aproximadamente duas vezes mais pesada do que a água e um pouco abaixo, nas minas, é encontrada ao redor de três ou quatro ou mesmo cinco vezes mais pesada, é provável que a quantidade de toda a matéria da Terra seja seja cinco ou seis vezes maior do que se ela consistisse toda de água; especialmente porque mostrei antes que a Terra é aproximadamente quatro vezes mais densa do que Júpiter. (...)

Isto é, Newton estimou que $5\rho_{água} < \rho_t < 6\rho_{água}$ e Cavendish encontrou 100 anos depois $\rho_t = 5,5\rho_{água}$!

1.3 Energia

Newton baseou sua mecânica nos conceitos de força e aceleração. Há uma outra formulação baseada na idéia de energia. O conceito básico é o de energia cinética T. Se estamos num sistema inercial S e uma partícula de massa inercial m_i move-se neste sistema com uma velocidade $\vec{v}$ sua energia cinética é definida por:

$$T \equiv \frac{m_i v^2}{2} = m_i \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \ .$$

Esta energia cinética é uma energia de movimento puro na mecânica clássica. Isto é, ela não está relacionada com qualquer tipo de interação (gravitacional, elétrica, magnética, elástica, nuclear, etc.).

Como tal, ela depende do sistema de referência já que o mesmo corpo no mesmo instante pode ter velocidades diferentes com relação a diferentes sistemas inerciais, de tal forma que sua energia cinética em relação a cada um destes sistemas pode ter um valor diferente.

Os outros tipos de energia são baseados em como a partícula interage com outros corpos. Por exemplo, a energia potencial gravitacional U_g entre dois corpos de massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2} separados por uma distância r entre si é dada por

$$U_g = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r} \ .$$

Se o corpo m_{g1} está fora da Terra a uma distância r_1 de seu centro podemos integrar esta equação substituindo m_{g2} por dm_{g2} e supondo uma distribuição isotrópica de matéria obtendo:

$$U = -G\frac{m_{g1}M_g}{r_1} \ ,$$

onde M_g é a massa gravitacional da Terra.

Se o corpo está a uma distância h da superfície terrestre, $r_1 = R_t + h$, onde R_t é o raio da Terra e $h \ll R_t$, esta expressão fica:

$$U = -G\frac{m_{g1}M_g}{R_t + h} \approx -\frac{Gm_{g1}M_g}{R_t} + m_{g1}gh \ ,$$

onde $g = GM_g/R_t^2 \approx 9,8 \ m/s^2$ é o campo gravitacional da Terra em sua superfície. Deixando de lado o termo constante $-Gm_{g1}M_g/R_t$ vem que a energia potencial gravitacional próxima da Terra é dada por $m_{g1}gh$.

A energia potencial eletrostática análoga, U_e, entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 separadas por uma distância r é dada por

$$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{r} \ ,$$

onde $\varepsilon_o = 8,85 \times 10^{-12} \ C^2s^2/kgm^3$ é a permissividade do vácuo.

A energia potencial elástica U_k de uma massa interagindo com uma mola de constante elástica k é dada por

$$U_k = \frac{kx^2}{2} \ ,$$

onde x é o deslocamento do corpo da posição de equilíbrio ($x = l - l_o$, com l sendo o comprimento esticado da mola e l_o seu comprimento natural).

Relacionamos os conceitos de força e energia através do gradiente ou derivada direcional:

$$\vec{F} = -\nabla U \ . \tag{1.7}$$

Isto é especialmente útil quando a energia potencial e a força dependem apenas da posição dos corpos.

Quando utilizamos a formulação da mecânica baseada apenas no conceito de energia, utilizamos o teorema de conservação da energia ao invés das três leis do movimento de Newton. Este teorema afirma que a energia total (soma das energias potenciais com a cinética) é uma constante no tempo no caso de sistemas conservativos.

Neste livro nos concentramos mais na formulação newtoniana baseada nas forças.

Capítulo 2

Aplicações da Mecânica Newtoniana

Discutimos aqui várias aplicações bem conhecidas da mecânica newtoniana. Mais tarde apresentamos as críticas de Ernst Mach à mecânica clássica utilizando estes exemplos. Reapresentamos então estes mesmos casos do ponto de vista da mecânica relacional para ilustrar os enfoques diferentes que ela oferece.

Na segunda lei de Newton, Eqs. (1.2) e (1.3), aparece uma velocidade e uma aceleração (supondo uma massa inercial constante). Estas velocidades e acelerações do corpo teste são em relação ao espaço absoluto, medidas pelo tempo absoluto. De acordo com o quinto corolário podemos também referir o movimento a qualquer sistema de referência que se move em relação ao espaço absoluto com uma velocidade constante. Hoje em dia chamamos a estes sistemas de referência de "sistemas de referência inerciais." Neste Capítulo assumimos que estamos descrevendo o movimento de corpos em relação a um sistema de referência inercial. Discutiremos este conceito de sistema inercial com mais detalhes e de maneira crítica em outros Capítulos.

Consideramos aqui apenas situações nas quais a massa inercial é uma constante. Nestes casos a segunda lei de Newton fica na forma

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \ . \tag{2.1}$$

Chamamos de partículas a corpos com dimensões desprezíveis comparadas com os comprimentos e distâncias envolvidas nos problemas. Em geral podemos desprezar suas propriedades internas e representá-las por pontos materiais. Isto é, uma partícula vai ser caracterizada por sua massa e para sua localização usaremos apenas três coordenadas descrevendo sua posição: x,y,z. Interessa-nos aqui estudar o movimento de partículas em situações simples e importantes.

2.1 Movimento Retilíneo Uniforme

Se temos uma partícula que está livre de forças externas, ou se a força resultante atuando sobre ela é nula, então ela vai se mover com uma velocidade constante $\vec{v}$ de acordo com a primeira lei do movimento:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = constante \ ,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}t \ .$$

Aqui $\vec{r}(t)$ é o vetor posição do corpo em relação a um sistema de referência inercial, $\vec{r}_o$ é a posição inicial da partícula e t é o tempo. A velocidade $\vec{v}$ é a velocidade do corpo em relação ao espaço absoluto de Newton ou em relação a um sistema de referência inercial.

Vemos então que a direção, o sentido e o valor numérico da velocidade vão permanecer constantes no tempo. Este resultado ou esta previsão só faz sentido se soubermos dizer quando (ou em que condições) uma partícula está livre de forças externas sem utilizar a primeira lei de Newton. Para fazer isto também precisamos encontrar um sistema de referência inercial sem utilizar a primeira lei de Newton (para evitar de cair em círculos viciosos). Nada disto é simples ou trivial. Discutiremos tudo isto detalhadamente mais para a frente.

2.2 Força Constante

Podemos integrar facilmente a Eq. (2.1) quando a força é uma constante obtendo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m_i} = constante \ ,$$

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t \ ,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \ .$$

Aqui $\vec{v}_o$ é a velocidade inicial.

2.2.1 Queda Livre

Como um primeiro exemplo de uma força externa constante temos a queda livre de um corpo próximo da superfície terrestre, desprezando a resistência do ar, Figura 2.1.

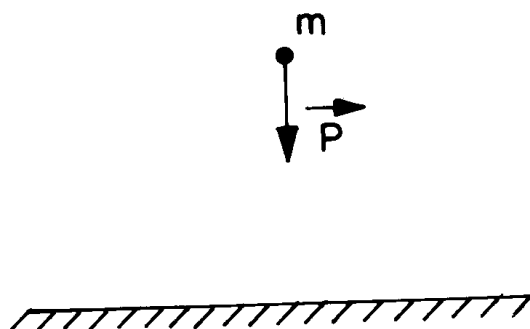



Figura 2.1: Queda livre.

A única força atuando sobre o corpo de prova é a atração gravitacional da Terra, seu peso $\vec{P} = m_g \vec{g}$. Com a Eq. (2.1) obtemos:

$$\vec{a} = \frac{m_g}{m_i} \vec{g} \ .$$

O valor de $\vec{g}$ depende apenas da Terra e da localização do corpo de prova, mas não depende de m_g ou de m_i, isto é, das massas gravitacional ou inercial do corpo de teste.

É um fato experimental que todos os corpos próximos da superfície terrestre caem no vácuo com a mesma aceleração. Isto não pode ser derivado de quaisquer leis ou teoremas de Newton, sendo um dado observacional. Este fato é válido independente do peso, da forma, da temperatura ou da composição química dos corpos. Se temos dois corpos 1 e 2 caindo no vácuo na mesma localização próximo a superfície terrestre, vem da experiência que $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{g}$, Figura 2.2. Isto é, $m_{g2}/m_{i2} = m_{g1}/m_{i1} = constante$.

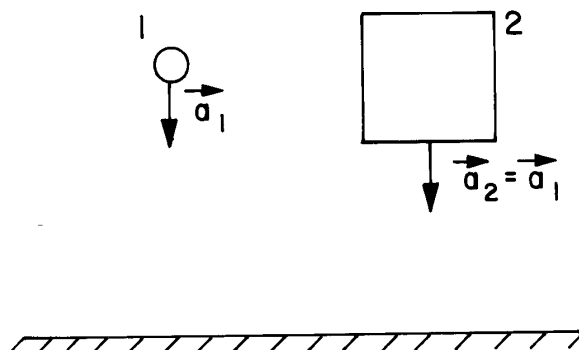



Figura 2.2: Dois corpos quaisquer caem com a mesma aceleração no vácuo.

O primeiro a chegar a esta conclusão extremamente importante foi Galileo (1564-1642) ao trabalhar com corpos caindo ao longo de planos inclinados. Alguns dos principais resultados obtidos por Galileo, em mecânica, surgiram no período entre 1600 e 1610. Destas experiências (corpos caindo de planos inclinados com resistência desprezível, ou caindo no vácuo) obtemos para todos os corpos:

$$\frac{m_i}{m_g} = \text{constante} \equiv \alpha \ . \tag{2.2}$$

Quando dizemos que estas duas massas (inercial e gravitacional) são iguais ($\alpha = 1$), estamos especificando $G = 6,67 \times 10^{-11}\ m^3/kgs^2$. Se disséssemos que estas duas massas são simplesmente proporcionais uma a outra, $m_i = \alpha m_g$ (onde α poderia ser uma constante diferente de 1 e poderia até mesmo ter dimensões), todos os resultados usuais permaneceriam válidos desde que escrevêssemos na lei de Newton da gravitação $G = \alpha^2 \times (6,67 \times 10^{-11}\ m^3/kgs^2)$ ao invés de $G = 6,67 \times 10^{-11}\ m^3/kgs^2$. Para ver isto precisamos escrever a aceleração de queda livre como:

$$a = \frac{P}{m_i} = \frac{GM_{gt}m_g}{R_t^2 m_i} \ .$$

Com a Eq. (2.2) e com $M_{it} = \rho_t V_t = \rho_t 4\pi R_t^3/3$ (da primeira definição

de Newton) obtemos:

$$\frac{G}{\alpha^2} = \frac{3a}{4\pi R_t \rho_t} \ .$$

Colocando os valores observados de $a = 9,8 \ m/s^2$, $R_t = 6,4 \times 10^6 \ m$ e $\rho_t = 5,5 \times 10^3 \ kg/m^3$ (da experiência de Cavendish) vem:

$$G = \alpha^2 \times (6,7 \times 10^{-11} \ m^3/kgs^2) \ .$$

Estas experiências de queda livre, etc. dizem apenas que estas duas massas (inercial e gravitacional) são proporcionais uma a outra e não que são iguais. Apesar disto, a escolha de α não vai ter influência nas previsões dos resultados experimentais. Por isto, é mais simples escolher a constante de proporcionalidade α como sendo por convenção igual a um: $\alpha = 1$. Daqui para a frente assumiremos esta escolha de α. Temos assim:

$$m_i = m_g \ . \tag{2.3}$$

O fato de que no vácuo todos os corpos caem com a mesma aceleração foi expresso por Newton no *Principia* como segue: "Tem sido observado por outros, por um longo tempo, que todos os tipos de corpos pesados (descontando-se a desigualdade de atraso que eles sofrem de um pequeno poder de resistência no ar) descem para a Terra *de alturas iguais* em tempos iguais; e podemos distinguir esta igualdade de tempos com uma grande precisão com a ajuda de pêndulos" (Livro III, Proposição 6). No seu livro *Óptica*, afirmou: "(...) O ar livre que respiramos é oitocentas ou novecentas vezes mais leve do que a água, e portanto oitocentas ou novecentas vezes mais rarefeito, e por isso sua resistência é menor do que a da água na mesma proporção, ou aproximadamente, como também verifiquei por experiências feitas com pêndulos. E no ar mais rarefeito a resistência é ainda menor, até que, rarefazendo o ar, ela se torna imperceptível. Pois pequenas penas caindo ao ar livre encontram grande resistência, mas num vidro alto bem esvaziado de ar elas caem tão rápido quanto o chumbo ou o ouro, como me foi dado comprovar diversas vezes" [New96], Questão 28, págs. 268-269.

2.2.2 Carga Movendo-se no Interior de um Capacitor Ideal

Apresentamos agora um outro exemplo de força constante. Augustin Coulomb (1738-1806) obteve em 1784-1785 a lei de força entre duas cargas pontuais q_1 e q_2. Na notação vetorial moderna e no Sistema Internacional de Unidades a força exercida por q_2 em q_1, quando ambas estão separadas por uma distância r é dada por (sendo $\hat{r}$ o versor unitário apontando de 2 para 1):

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\hat{r}}{r^2} \ . \tag{2.4}$$

Esta força é muito similar à lei de Newton para a gravitação: é direcionada ao longo da linha reta ligando os corpos, segue a lei de ação e reação e cai com o quadrado da distância. Além do mais, ela depende do produto de duas cargas, enquanto que na força gravitacional temos o produto de duas massas. Parece que Coulomb foi levado a esta expressão mais por analogia com a lei de Newton para a gravitação do que como resultado de suas poucas experiências, [Hee92]. A similaridade entre a força de Coulomb (2.4) e a força de Newton para a gravitação, Eq. (1.4), mostra que as massas gravitacionais têm o mesmo papel que as cargas elétricas: ambas geram e sentem algum tipo de interação com corpos equivalentes, sejam eles gravitacionais ou elétricos. A forma da interação é essencialmente a mesma.

Um capacitor plano ideal é representado na Figura 2.3.

Nele, temos duas placas planas grandes de lado l separadas por uma pequena distância d, onde $d \ll l$. As placas situadas em $z = z_o$ e em $z = -z_o$ estão uniformente carregadas com cargas totais Q e $-Q$, respectivamente. Em cada placa temos uma densidade de carga constante dada por $\sigma = Q/l^2$ e $-\sigma$, respectivamente. Se integramos a força exercida pelo capacitor atuando sobre uma partícula carregada movendo-se em seu interior utilizando a expressão de Coulomb e desprezando os efeitos de borda obtemos o resultado bem conhecido dado por:

$$\vec{F} = -q\frac{\sigma\hat{z}}{\varepsilon_o} = q\vec{E} \ . \tag{2.5}$$

Aqui $\hat{z}$ é o vetor unitário apontando da placa negativa para a positiva e $\vec{E} = -\sigma\hat{z}/\varepsilon_o$ é o campo elétrico gerado pelo capacitor na região entre as placas. Fora do capacitor ideal não há campo elétrico.

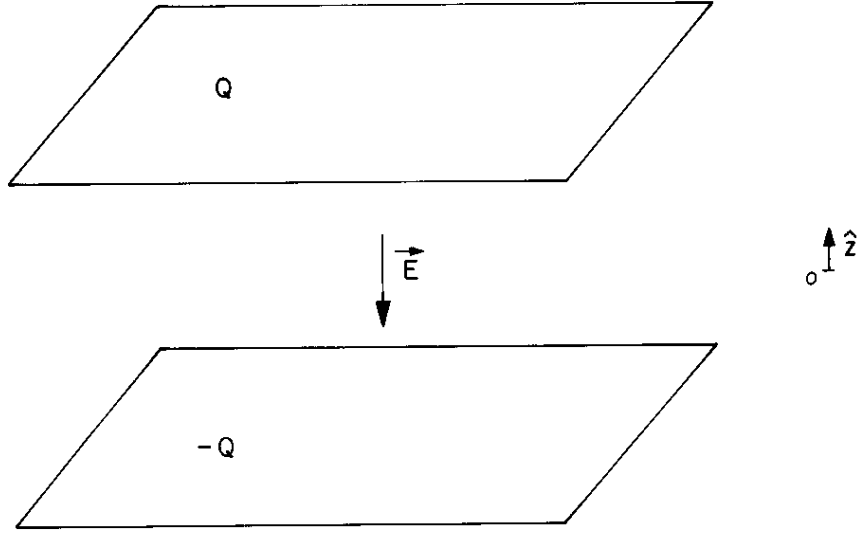



Figura 2.3: Capacitor plano ideal.

Na eletrodinâmica de Weber vai haver ainda uma componente da força exercida pelo capacitor sobre a carga q movendo-se em seu interior que depende da velocidade da carga em relação as placas do capacitor ([Ass89b], [AC91], [AC92], [Ass92b, Seção 5.6], [Ass94, Seções 6.7 e 7.2] e [Ass95b, Seção 5.5]). Mas supondo velocidades baixas da carga q (em comparação com a velocidade da luz, $v^2/c^2 \ll 1$), como podemos supor nesta experiência, vem que vai valer a Eq. (2.5).

Na eletrodinâmica clássica (equações de Maxwell mais força de Lorentz) esta é a força total exercida pelo capacitor em qualquer carga interna a ele, não interessando sua posição, velocidade ou aceleração em relação às placas, supondo cargas fixas sobre as placas do capacitor. Isto pode ser obtido supondo um capacitor feito de placas dielétricas carregadas (havendo vácuo entre as placas) que não permitem um movimento livre das cargas sobre a superfície das placas.

Neste caso o capacitor gera apenas um campo elétrico constante no interior das placas e nenhum campo magnético.

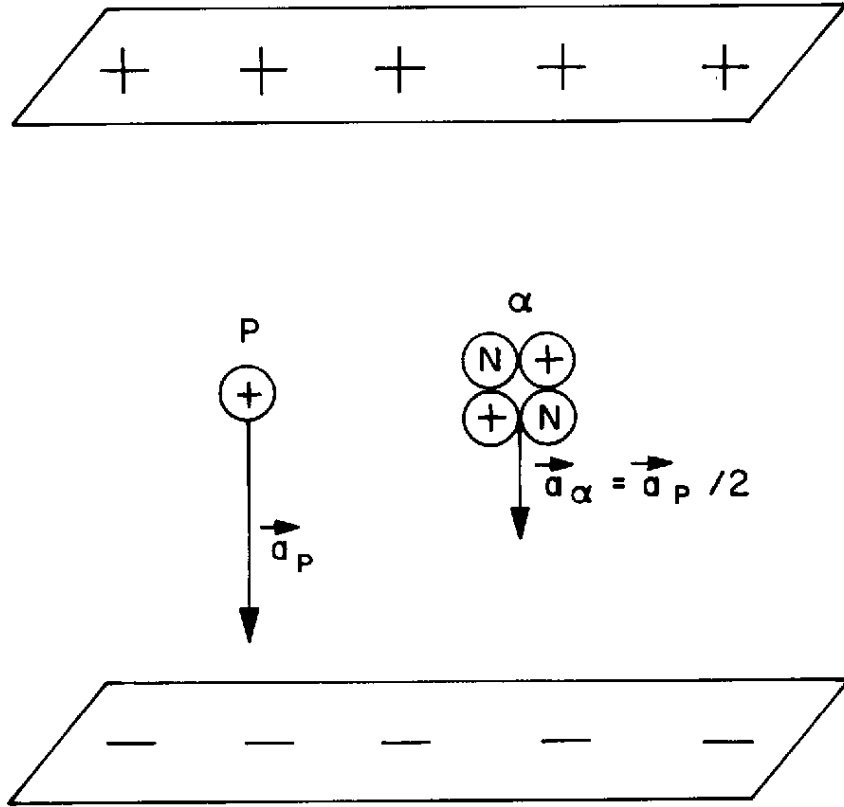



Figura 2.4: Duas partículas sendo aceleradas num capacitor.

Igualando as Eqs. (2.5) e (2.1) resulta:

$$\vec{a} = \frac{q}{m_i}\vec{E} \ .$$

O campo elétrico depende apenas da densidade superficial de carga sobre as placas do capacitor e é independente de q ou de m_i. Ele é análogo ao campo gravitacional na superfície da Terra no nosso

exemplo anterior. A diferença agora é que num mesmo campo elétrico podemos ter corpos sofrendo acelerações diferentes. Por exemplo, um próton (p) sendo acelerado no interior de um capacitor vai ter uma aceleração duas vezes maior do que a aceleração de uma partícula alfa (α) (núcleo do átomo de hélio, com dois prótons e dois neutrons) sendo acelerada no mesmo capacitor: $\vec{a}_p = 2\vec{a}_\alpha$, Figura 2.4. Isto é devido ao fato de que a carga de uma partícula alfa é duas vezes a de um próton, enquanto sua massa é quatro vezes a do próton devido aos dois neutrons e dois prótons que possui. Isto já não ocorre na queda livre, já que todos os corpos (não interessando seu peso, forma, composição química, carga elétrica, etc.) caem com a mesma aceleração no vácuo na superfície da Terra.

Isto é um fato extremamente importante. Comparando estes dois exemplos (ver Figuras 2.2 e 2.4) vemos que a massa inercial de um corpo é proporcional à sua massa gravitacional, mas não é proporcional à sua carga. Este fato sugere que a inércia de um corpo está relacionada com seu peso ou com sua massa gravitacional m_g, mas não com suas propriedades elétricas. Voltaremos a este ponto depois.

2.2.3 Trem Acelerado

O terceiro exemplo discutido aqui é o de um trem acelerado em relação a Terra movendo-se em linha reta. No teto de um dos vagões há um pequeno corpo suspenso por uma corda, Figura 2.5.

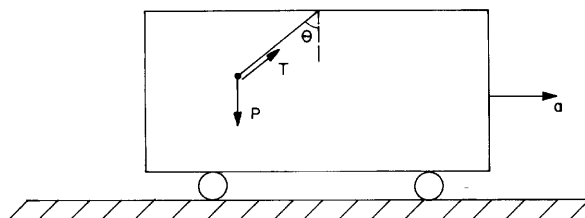



Figura 2.5: Trem acelerado.

Analisamos aqui a situação de equilíbrio na qual o corpo está em repouso em relação ao trem. Há duas forças agindo no corpo: a força gravitacional da Terra (o peso $\vec{P} = m_g\vec{g}$) e a força exercida pela corda devido a tensão $\vec{T}$. A equação de movimento é da dada por:

$$\vec{P} + \vec{T} = m_i\vec{a} \ .$$

Usando o ângulo θ da Figura 2.5 vem:

$$P = T\cos\theta \ , \tag{2.6}$$

$$T\sin\theta = m_i a. \tag{2.7}$$

Destas expressões e de $P = m_g g$ obtemos:

$$\tan\theta = \frac{m_i}{m_g}\frac{a}{g} \ . \tag{2.8}$$

Do fato experimental de que θ é o mesmo para todos os corpos independente de seus pesos, composições químicas etc. obtemos mais uma vez que $m_i = \alpha m_g$, ou que a inércia do corpo é proporcional ao seu peso.

2.3 Movimentos Oscilatórios

Nesta Seção lidamos com forças que dependem da posição e que geram movimentos oscilatórios.

2.3.1 Mola

O primeiro exemplo a ser discutido aqui é o de uma massa presa a uma mola que está conectada à Terra, Figura 2.6. O peso do corpo de teste é equilibrado pela força normal exercida por uma mesa sem

atrito. A única força remanescente é a força horizontal exercida pela mola.

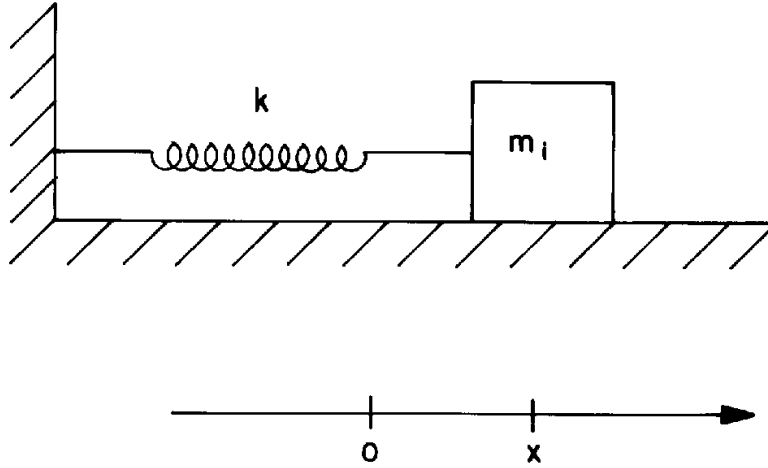



Figura 2.6: Mola.

A força exercida pela mola no corpo de massa inercial m_i é dada por

$$\vec{F} = -kx\hat{x} \ , \tag{2.9}$$

onde k é a constante elástica da mola, x é o deslocamento do corpo da posição de equilíbrio ($x = l - l_o$, com l sendo o comprimento da mola distendida e l_o seu comprimento natural) e $\hat{x}$ o vetor unitário ao longo do comprimento da mola.

Igualando isto com a Eq. (2.1) e usando $\vec{a} = (d^2x/dt^2)\hat{x} = \ddot{x}\hat{x}$ obtemos a equação de movimento unidimensional dada por:

$$m_i\ddot{x} + kx = 0 \ . \tag{2.10}$$

Esta equação pode ser resolvida facilmente:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \theta_o) \ ,$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_i}} \ . \tag{2.11}$$

A constante A é a amplitude de oscilação, θ_o é a fase inicial e ω a frequência de oscilação. As constantes A e θ_o podem ser relacionadas com a energia total E do corpo e com a posição inicial x_o por:

$$E = T + U = \frac{m_i \dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \ ,$$

$$x_o = A \sin \theta_o \ .$$

2.3.2 Pêndulo Simples

O segundo exemplo, o mais importante a ser discutido nesta Seção, é o de um pêndulo simples, Figura 2.7. Um corpo pequeno de dimensão típica d (tamanho, raio ou diâmetro máximo) oscila num plano vertical preso a um fio de comprimento fixo ℓ, tal que $d \ll \ell$.

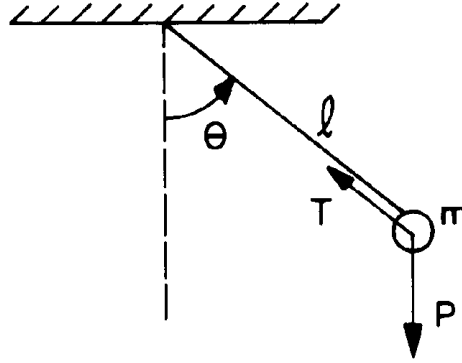



Figura 2.7: Pêndulo simples.

Desprezando a resistência do ar, há duas forças agindo no corpo: seu peso $\vec{P} = m_g \vec{g} = -m_g g \hat{z}$ e a tensão no fio $\vec{T}$. A equação de movimento é simplesmente $\vec{P} + \vec{T} = m_i \vec{a}$. Utilizando o ângulo representado nesta Figura, o fato de que o comprimento do fio é constante

e um sistema de coordenadas polares com origem no ponto de fixação do fio ao teto vem (com $s = \ell\theta$, $v_\theta = \ell\dot{\theta}$ e $a_\theta = \ell\ddot{\theta}$ ao invés de x, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$):

$$T - P\cos\theta = ma_c = m\ell\dot{\theta}^2 \ ,$$

$$-P\sin\theta = m_i a_\theta = m_i\ell\ddot{\theta} \ .$$

Se considerarmos apenas pequenas oscilações do pêndulo ($\theta \ll \pi/2$) então $\sin\theta \approx \theta$ e esta última equação pode ser simplificada, ficando na forma:

$$m_i\ddot{\theta} + m_g\frac{g}{\ell}\theta = 0 \ .$$

Esta equação tem a mesma forma que a Eq. (2.10). Sua solução é

$$\theta = A\cos(\omega t + B) \ , \tag{2.12}$$

com

$$\omega = \sqrt{\frac{m_g}{m_i}\frac{g}{\ell}} \ . \tag{2.13}$$

A constante A é a amplitude de oscilação para θ, B é a fase inicial e ω é a frequência de oscilação.

Comparamos agora as freqüências de oscilação ω para a mola e para o pêndulo simples, Eqs. (2.11) e (2.13). Os períodos de oscilação são dados por $T = 2\pi/\omega$. A diferença mais marcante é que enquanto a freqüência de oscilação da mola depende apenas de m_i mas não de m_g, no pêndulo a freqüência de oscilação depende da razão m_g/m_i. Suponha agora que temos um corpo de prova com uma massa inercial m_i e uma massa gravitacional m_g. Se ele oscila horizontalmente preso a uma mola com constante elástica k sua freqüência de oscilação é dada por $\omega_1 = \sqrt{k/m_i}$. Se ligamos dois destes corpos à mesma mola, a nova freqüência de oscilação é dada por $\omega_2 = \sqrt{k/2m_i} = \omega_1/\sqrt{2}$, Figura 2.8.

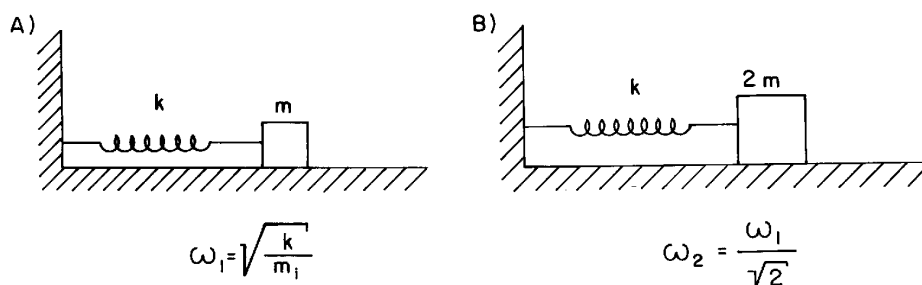



Figura 2.8: Duas massas diferentes, m e $2m$, ligadas na mesma mola.

Por outro lado, se o primeiro corpo estivesse ligado a um fio de comprimento ℓ e sofresse pequenas oscilações num plano vertical como o pêndulo descrito acima, sua freqüência de oscilação seria dada por: $\omega_1 = \sqrt{m_g g/m_i \ell}$. Ligando dois destes corpos ao mesmo fio, a nova freqüência de oscilação do pêndulo é dada por $\omega_2 = \sqrt{2m_g g/2m_i \ell} = \omega_1$, Figura 2.9.

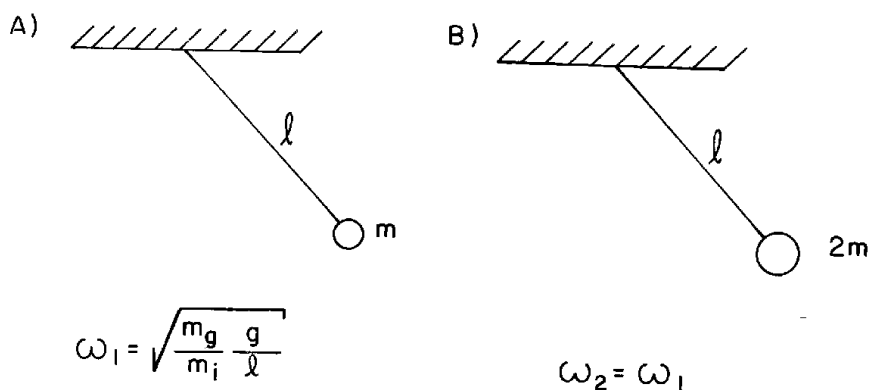



Figura 2.9: Duas massas diferentes, m e $2m$, ligadas no mesmo pêndulo.

O mesmo vai acontecer qualquer que seja a composição química do corpo. Isto é, em pêndulos de mesmo comprimento ℓ e na mesma localização sobre a Terra (mesmo g) todos os corpos oscilam com a

mesma freqüência no vácuo, não importando seu peso, sua forma, sua composição química etc. Isto é um fato experimental que não pode ser deduzido das leis do movimento de Newton já que delas não se tira que $m_i = m_g$ (ou que $m_i = \alpha m_g$). Apenas a experiência pode nos dizer que a freqüência de oscilação de um pêndulo no vácuo não depende do peso ou da composição química dos corpos, enquanto que a freqüência de oscilação de uma mola na horizontal é inversamente proporcional à raiz quadrada da massa do corpo.

Este fato experimental mostra que podemos cancelar as massas na Eq. (2.13) e com isto escrever a freqüência de oscilação ω do pêndulo e seu período T como:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \frac{2\pi}{T} \ .$$

Na Seção 2.2.2 vimos que a massa inercial de um corpo é proporcional à massa gravitacional ou ao peso do corpo, mas que não é proporcional à sua carga ou a propriedades elétricas do corpo. Aqui vemos que a massa inercial do corpo não é proporcional a qualquer propriedade elástica do corpo ou do meio que o circunda (a mola neste caso). Analogamente pode ser mostrado que a massa inercial ou inércia de um corpo não está relacionada com nenhuma propriedada magnética, nuclear ou de qualquer outro tipo, seja do corpo de prova ou do meio que o circunda. Newton expressou isto no Corolário V, Proposição 6 do Livro III do *Principia* (entre colchetes vão nossas palavras): "O poder da gravidade é de uma natureza diferente do poder do magnetismo; pois a atração magnética não é como a matéria atraída [isto é, a força magnética não é proporcional à massa inercial do corpo sendo atraído]. Alguns corpos são mais atraídos pelo ímã, outros menos, a maior parte dos corpos não é atraída. O poder do magnetismo num mesmo corpo pode ser aumentado e diminuído e algumas vezes é muito mais forte, pela quantidade de matéria [em relação à quantidade de matéria que contém], do que o poder da gravidade e ao afastar-se do ímã não cai como o quadrado mas quase como o cubo da distância, tão aproximadamente quanto pude julgar a partir de algumas observações grosseiras."

A massa inercial só é proporcional à massa gravitacional ou ao peso do corpo. Por que a natureza se comporta assim? Não há uma

resposta a esta pergunta na mecânica newtoniana. Poderia acontecer que um pedaço de ouro caísse no vácuo em direção à Terra com uma aceleração maior do que um pedaço de ferro ou de prata com o mesmo peso, mas isto não se observa. Também poderia acontecer que um pedaço mais pesado de ouro caísse no vácuo em direção à Terra com uma aceleração maior do que um pedaço mais leve também de ouro, ou do que um outro pedaço de ouro com uma forma diferente. Mais uma vez isto não se observa. Caso acontecesse qualquer um destes casos todos os resultados da mecânica newtoniana continuariam a valer, com a única diferença de que não mais cancelaríamos m_i com m_g. Diríamos então que m_i depende da composição química do corpo, ou de sua forma, ou que não é linearmente proporcional a m_g, ou ... dependendo do que se observasse experimentalmente.

Embora esta proporcionalidade impressionante entre a inércia e o peso (ou, mais especificamente, entre m_i e m_g) não prove nada, ela é altamente sugestiva indicando que a inércia de um corpo (sua resistência em sofrer acelerações) pode ter uma origem gravitacional. Mais para a frente mostraremos que este é realmente o caso.

Por hora apresentamos aqui as experiências precisas de Newton com pêndulos para chegar na proporcionalidade entre a inércia (ou quantidade de matéria como Newton a chamava) e o peso (ou proporcionalidade entre m_i e m_g, como dizemos hoje em dia). Na primeira definição do *Principia*, aquela de quantidade de matéria, Eq. (1.1), Newton disse: "É essa quantidade que doravante sempre denominarei pelo nome de corpo ou massa. A qual é conhecida através do peso de cada corpo, pois é proporcional ao peso, como encontrei em experimentos com pêndulos, realizados muito rigorosamente, os quais serão mostrados mais adiante." Estes experimentos estão contidos na Proposição 6, Teorema 6 do Livro III do *Principia*, já mencionada anteriormente:

> *Que todos os corpos gravitam em direção a cada planeta e que os pesos dos corpos em direção a qualquer planeta, a distâncias iguais do centro do planeta, são proporcionais às quantidades de matéria que eles contêm.*
>
> Tem sido observado por outros, por um longo tempo, que todos os tipos de corpos pesados (descontando-se a desi-

> gualdade de atraso que eles sofrem de um pequeno poder de resistência no ar) descem para a Terra *de alturas iguais* em tempos iguais; e podemos distinguir esta igualdade de tempos com uma grande precisão com a ajuda de pêndulos. Tentei experiências com ouro, prata, chumbo, vidro, areia, sal comum, madeira, água e trigo. Fiz dois recipientes de madeira, redondos e iguais; enchi um com madeira e suspendi um peso igual de ouro (tão exatamente quanto pude) no centro de oscilação do outro. Os recipientes, suspensos por fios iguais de 11 pés [3,35 metros] eram um par de pêndulos perfeitamente iguais em peso, forma e recebendo igualmente a resistência do ar. E, colocando um ao lado do outro, os observei movimentar-se juntos para frente e para trás, por um longo tempo, com vibrações iguais. E, portanto, a quantidade de matéria no ouro (pelo Cor. I e VI, Prop. XXIV, Livro II) estava para a quantidade de matéria na madeira como a ação da força motriz (ou *vis motrix*) sobre todo o ouro para a ação da mesma força sobre toda a madeira; isto é, como o peso de um para o peso do outro e o mesmo aconteceu nos outros corpos. Por estes experimentos, em corpos do mesmo peso, podia claramente ter descoberto uma diferença de matéria menor do que a milésima parte do todo, se tal diferença tivesse existido. (...)

Deste experimento Newton obteve que $m_i = m_g$ com uma parte em mil, isto é:

$$\frac{m_i - m_g}{m_i} \leq \pm 10^{-3} \ .$$

Com as experiências de Eötvos no começo deste século a precisão desta relação foi melhorada para uma parte em 10^8, sendo que hoje em dia a precisão é de uma parte em 10^{12}. Para as referências ver [WE82].

Discussões didáticas sobre a proporcionalidade entre a massa inercial e gravitacional podem ser encontradas em [Gol68, págs. 162-172], [Luc79, págs. 103-108 e 516-525] e [Nus81, págs. 497-504].

2.4 Movimento Circular Uniforme

Nesta Seção discutimos três situações de movimento circular uniforme que foram analisadas por Newton: Um planeta orbitando ao redor do Sol, dois globos ligados por uma corda e o balde girando.

Inicialmente consideramos um único corpo sob a influência de uma força central $\vec{F}$, Figura 2.10.

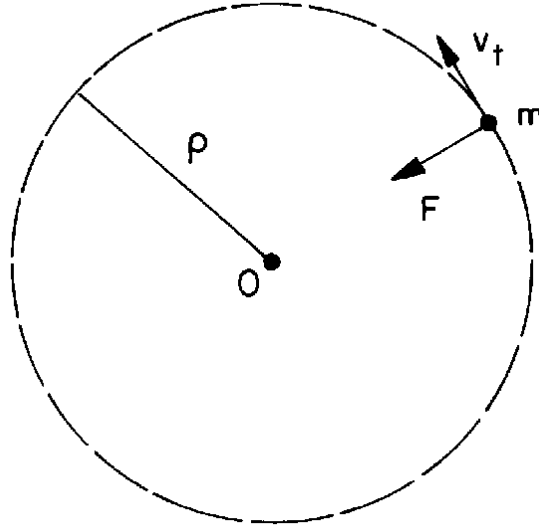



Figura 2.10: Movimento circular uniforme pela ação de uma força central.

Consideramos uma força central sempre direcionada para a origem O de um sistema de coordenadas inercial S: $\vec{F} = -F\hat{\rho}$, onde $F = |\vec{F}|$ e $\hat{\rho}$ é um vetor unitário radial que aponta para fora a partir de O. Com um sistema de coordenadas polares para descrever a posição, velocidade e aceleração de uma partícula temos, respectivamente:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} \ ,$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi} \ ,$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\varphi} \ ,$$

onde $\rho = |\vec{r}|$.

Com a Eq. (2.1) e com um raio ρ constante (movimento circular uniforme) obtemos:

$$F = m_i a_c = m_i \rho \dot{\varphi}^2 \ , \qquad (2.14)$$

$$\dot{\varphi} = constante \ .$$

Representamos a aceleração centrípeta a_c que surge do movimento na direção φ por:

$$a_c = \rho\dot{\varphi}^2 = \frac{v_t^2}{\rho} \ ,$$

onde

$$v_t = \rho\dot{\varphi} \ .$$

Huygens (1629-1695) e Newton foram os primeiros a obter este valor para a aceleração de um corpo girando com velocidade constante ao redor de um centro. No caso de Huygens ele calculou a força centrífuga (nome cunhado por ele, significando uma tendência a se afastar do centro), chegando em seu resultado em 1659, redigindo um manuscrito sobre isto que só chegou a ser publicado em 1703. Contudo em seu livro *Horologium Oscillatorum* de 1673 apresentou as principais propriedades da força centrífuga, sem contudo dar as provas de como chegou nelas. Ele foi então o primeiro a publicar o valor correto desta aceleração. Newton calculou a força centrípeta (um nome que cunhou para se opor ao de Huygens, já que na mecânica de Newton só aparecem forças em direção a um centro) entre 1664 e 1666, sem conhecer os resultados de Huygens. No *Principia* de 1687 faz amplo uso deste resultado. Ver [Bar89, Seções 9.7-9.8 e 10.5-10.6].

Deve ser observado que esta força central muda apenas a direção do movimento, mantendo o módulo da velocidade tangencial constante: $|\vec{v}_t| = constante$.

2.4.1 Órbita Circular de um Planeta

A primeira situação analisada aqui é a de um planeta orbitando ao redor do Sol devido à sua atração gravitacional. Consideramos a massa gravitacional do planeta, m_{gp}, muito menor do que a massa gravitacional do Sol, m_{gs}, de tal forma que podemos desprezar o movimento do Sol, ver Figura 2.11. Embora a órbita dos planetas sejam elípticas em geral, vamos considerar aqui apenas o caso particular das órbitas circulares em que as distâncias dos planetas ao Sol são constantes.

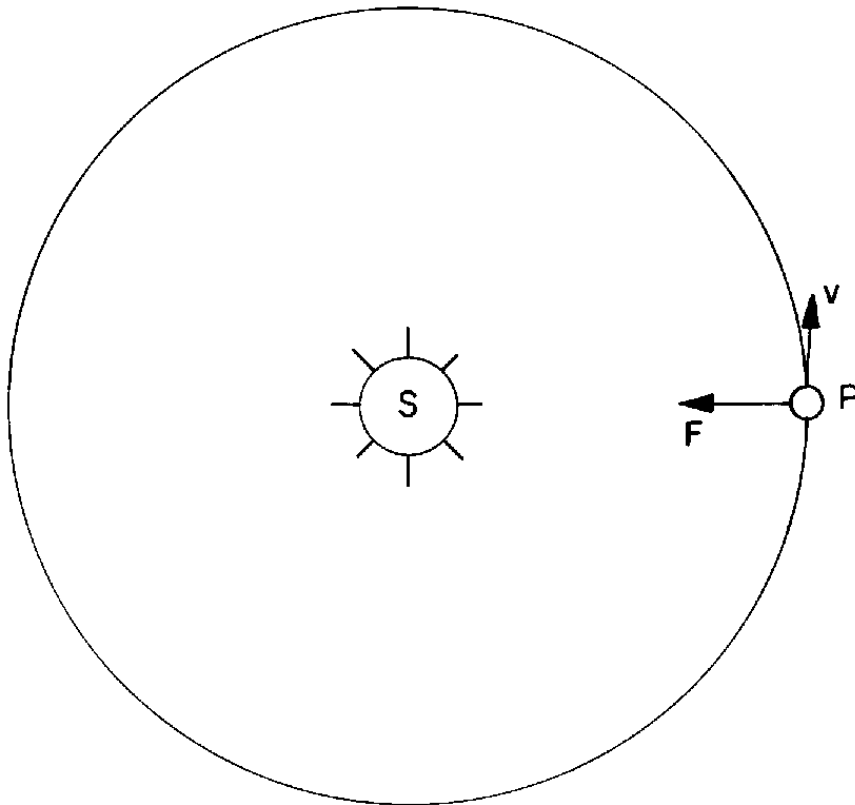



Figura 2.11: Planeta orbitando ao redor do Sol.

Das Eqs. (2.14) e (1.4) obtemos:

$$F = G\frac{m_{gs}m_{gp}}{r^2} = m_{ip}a_{cp} = m_{ip}\frac{v_{tp}^2}{r} \ .$$

Da Eq. (2.3):

$$a_{cp} = \frac{v_{tp}^2}{r} = \frac{Gm_{gs}}{r^2} \ .$$

Isto é, a aceleração centrípeta ou a velocidade orbital não dependem da massa do planeta, mas apenas da massa do Sol.

Como pode o planeta manter uma distância constante ao Sol (ou a Lua em relação à Terra, por exemplo), apesar da atração gravitacional entre eles? De acordo com Newton é porque o planeta tem uma aceleração centrípeta em relação ao espaço absoluto (poderíamos dizer em relação a um referencial inercial). Isto é, se o planeta e o Sol estivessem inicialmente em repouso em relação a um referencial inercial, eles iriam se atrair e se aproximar um do outro devido a esta atração. O que mantém o planeta a uma distância constante do Sol apesar da atração gravitacional entre eles é a aceleração centrípeta do planeta no espaço absoluto, isto é, seu movimento tangencial com relação ao Sol.

2.4.2 Dois Globos

Consideramos agora dois globos ligados entre si por uma corda e rodando em relação a um sistema inercial com uma velocidade angular constante $\omega = \dot{\varphi} = v_t/\rho$ ao redor do centro de massa O, Figura 2.12.

A única força sentida por cada globo é a exercida pela corda tensionada. Representando esta tensão por T obtemos pela Eq. (2.14) aplicada ao globo 1:

$$T = m_{i1}a_{c1} = m_{i1}\frac{v_{t1}^2}{\rho_1} = m_{i1}w^2\rho_1 \ , \qquad (2.15)$$

Para o segundo globo vem, analogamente:

$$T = m_{i2} a_{c2} = m_{i2} \frac{v_{t2}^2}{\rho_2} = m_{i2} w^2 \rho_2 \ . \tag{2.16}$$

Isto é, quanto maior for a rotação dos globos (quanto maior for ω), maior será a tensão na corda que suporta esta rotação. Se ao invés da corda tivermos uma mola de constante elástica k, a tensão poderia ser medida por $T = k(l - l_o)$, onde l é o comprimento da mola distendida ($l = \rho_1 + \rho_2$, ver a Figura 2.12) e l_o seu comprimento natural. Medindo l, dados k e l_o, podemos saber a tensão. Sabendo m_{i1}, ω e ρ_1 também podemos saber a tensão aplicando a Eq. (2.15).

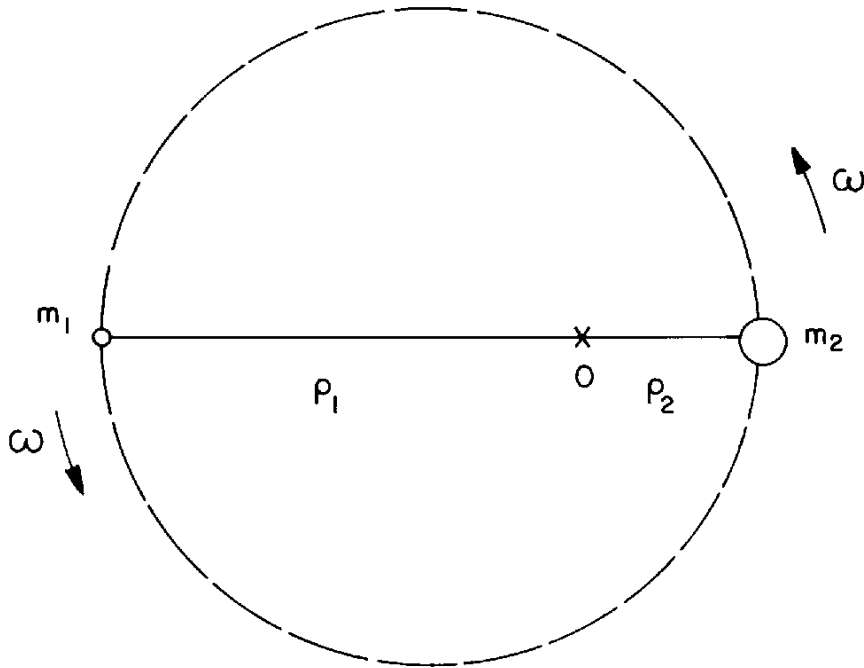



Figura 2.12: Dois globos girando.

Newton discutiu este problema dos dois corpos como uma possível maneira de distinguir o movimento relativo do absoluto (ou, mais especificamente, a rotação relativa da absoluta). Isto é, por esta experiência poderíamos saber se os globos estão ou não girando em relação ao espaço absoluto (ou em relação a um referencial inercial).

Sua discussão aparece no Escólio do começo do Livro I do *Principia*, após as oito definições iniciais e antes dos três axiomas ou leis do movimento. Aqui vai toda a discussão, com nossa ênfase em itálico:

> É realmente uma questão de grande dificuldade descobrir, e efetivamente distinguir, os movimentos verdadeiros de corpos particulares daqueles aparentes; porque as partes daquele espaço imóvel,no qual aqueles movimentos se realizam,de modo algum são passíveis de serem observados pelos nossos sentidos. No entanto, a coisa não é totalmente desesperadora, pois temos alguns argumentos para guiar-nos, parcialmente a partir dos movimentos aparentes, que são as diferenças dos movimentos verdadeiros, e parcialmente a partir das forças, que são as causas e os efeitos dos movimentos verdadeiros. Por exemplo, se dois globos, mantidos a uma dada distância um do outro por meio de uma corda que os ligue, forem girados em torno do seu centro comum de gravidade, poderíamos descobrir, a partir da tensão da corda, a tendência dos globos a se afastar do eixo de seu movimento, e a partir daí poderíamos calcular a quantidade de seus movimentos circulares. E então se quaisquer forças iguais fossem imprimidas de uma só vez nas faces alternadas dos globos para aumentar ou diminuir seus movimentos circulares, a partir do acréscimo ou decréscimo da tensão na corda, poderíamos inferir o aumento ou diminuição de seus movimentos; e assim seria encontrado em que faces aquelas forças devem ser imprimidas, tal que os movimentos dos globos pudessem ser aumentados ao máximo, isto é, poderíamos descobrir suas faces posteriores ou aquelas que, no movimento circular, realmente vêm depois. Mas sendo conhecidas as faces que vem depois, e conseqüentemente as opostas que precedem, deveríamos da mesma forma conhecer a determinação dos seus movimentos. E, assim, poderíamos encontrar tanto a quantidade como a determinação desse movimento circular, mesmo em um imenso vácuo, onde não existisse nada externo ou sensível com o

> qual os globos pudessem ser comparados. *Porém, se naquele espaço fossem colocados alguns corpos remotos que mantivessem sempre uma dada posição uns com relação aos outros, como as estrelas fixas mantêm nas nossas regiões, não poderíamos realmente determinar a partir da translação relativa dos globos entre aqueles corpos, se o movimento pertencia aos globos ou aos corpos. Mas, se observássemos a corda, e descobríssemos que sua tensão era aquela mesma tensão que os movimentos dos corpos exigiam, poderíamos concluir que o movimento estava nos globos e que os corpos estavam em repouso*; então, finalmente, a partir da translação dos globos entre os corpos, devemos obter a determinação dos seus movimentos. Mas as maneiras pelas quais vamos obter os movimentos verdadeiros a partir de suas causas, efeitos e diferenças aparentes e o contrário, serão explicadas mais amplamente no próximo tratado. Pois foi com este fim que o compus.

Suponha que as estrelas fixas estejam em repouso em relação ao espaço absoluto. Girando os globos com uma velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação ao espaço absoluto (ou em relação às estrelas fixas neste caso) geraria, de acordo com Newton, uma tensão na corda. Isto poderia ser visualizado por um aumento no comprimento de uma mola substituindo a corda. Suponha agora a mesma situação cinemática acima, ou seja, com os globos girando em relação às estrelas fixas com uma velocidade angular constante $\vec{\omega}$. Mas agora, neste segundo caso, suponha que os globos estejam em repouso em relação ao espaço absoluto e que as estrelas fixas estejam girando como um todo em relação ao espaço absoluto, com uma velocidade angular constante $-\vec{\omega}$. Neste segundo caso, de acordo com o que Newton escreveu acima, não haveria tensão na corda (ou a mola não se distenderia nem ficaria tensionada). Desta forma poderíamos distinguir a rotação verdadeira ou absoluta dos globos (em relação ao espaço absoluto) da rotação aparente ou relativa dos globos (em relação as estrelas fixas). Isto é, observando se há ou não uma tensão na corda poderíamos saber se os globos estão girando ou não em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial, embora em ambos os casos

haja a mesma rotação aparente ou relativa dos globos em relação às estrelas fixas. Mais tarde voltaremos a discutir esta experiência.

2.4.3 A Experiência do Balde de Newton

Analisamos agora a experiência do balde de Newton. Infelizmente poucos livros didáticos tratam deste assunto e uma exceção é o de Nussenzveig, [Nus81, págs. 504-507]. Esta é uma das experiências mais simples e mais importantes dentre todas aquelas realizadas por Newton. Ela está descrita logo antes da experiência dos dois globos descrita acima, no Escólio após as oito definições no início do Livro I do *Principia*, antes dos axiomas ou leis do movimento (nossa ênfase):

> *Os efeitos que distinguem movimento absoluto de relativo são as forças que agem no sentido de provocar um afastamento a partir do eixo do movimento circular. Pois não há tais forças em um movimento circular puramente relativo; mas em um movimento circular verdadeiro ou absoluto elas são maiores ou menores, dependendo da quantidade do movimento.* Se um recipiente, suspenso por uma longa corda, é tantas vezes girado, a ponto de a corda ficar fortemente torcida, e então enchido com água e suspenso em repouso junto com a água; a seguir, pela ação repentina de outra força, é girado para o lado contrário e, enquanto a corda desenrola-se, o recipiente continua no seu movimento por algum tempo; a superfície da água, de início, será plana, como antes de o recipiente começar a se mover; mas depois disso, o recipiente, por comunicar gradualmente o seu movimento a água, fará com que ela comece nitidamente a girar e a afastar-se pouco a pouco do meio e a subir pelos lados do recipiente, transformando-se em uma figura côncava *(conforme eu mesmo experimentei)*, e quanto mais rápido se torna o movimento, mais a água vai subir, até que, finalmente, realizando suas rotações nos mesmos tempos que o recipiente, ela fica em repouso relativo nele. Essa subida da água mostra sua tendência a se afastar do eixo de seu movimento; e

> o movimento circular verdadeiro e absoluto da água, que aqui é diretamente contrário ao relativo, torna-se conhecido e pode ser medido por esta tendência. De início, quando o movimento relativo da água no recipiente era máximo, não havia nenhum esforço para afastar-se do eixo; a água não mostrava nenhuma tendência a circunferência, nem nenhuma subida na direção dos lados do recipiente, mas mantinha uma superfície plana, e, portanto, seu movimento circular verdadeiro ainda não havia começado. Mas, posteriormente, quando o movimento relativo da água havia diminuído, a subida em direção aos lados do recipiente mostrou o esforço dessa para se afastar do eixo; e esse esforço mostrou o movimento circular real da água aumentando continuamente, até ter adquirido sua maior quantidade, quando a água ficou em repouso relativo no recipiente. *E, portanto, esse esforço não depende de qualquer translação da água com relação aos corpos do ambiente, nem pode o movimento circular verdadeiro ser definido por tal translação.* Há somente um movimento circular real de qualquer corpo em rotação, correspondendo a um único poder de tendência de afastamento a partir de seu eixo de movimento, como efeito próprio e adequado; mas movimentos relativos, em um mesmo e único corpo, são inumeráveis, de acordo com as diferentes relações que ele mantém com corpos externos e, como outras relações, são completamente destituídas de qualquer efeito real, embora eles possam talvez compartilhar daquele único movimento verdadeiro. (...)

Vamos obter a forma da superfície da água e a pressão num ponto qualquer do líquido no interior do balde que gira. Consideramos a água como um fluído incompressível homogêneo ideal com densidade ρ.

Na primeira situação o balde e a água estão em repouso em relação a um referencial inercial, Figura 2.13. A Terra é um bom referencial inercial para esta experiência. A superfície da água é plana e a pressão dentro dela cresce em função da profundidade h de acordo

com $p(h) = p_o + \rho g h$, onde $p_o = 1\ atm = 760\ mm\ Hg = 1 \times 10^5\ N/m^2$ é a pressão atmosférica e $g \approx 9,8\ m/s^2$ é o campo gravitacional da Terra. Desta expressão podemos obter o princípio de Arquimedes (287-212 a. C.): A força para cima (empuxo) exercida pela água em qualquer corpo submerso de volume V é dada por $\rho g V$. Esta força não depende da massa do corpo mas apenas do volume submerso e da densidade do líquido que o circunda.

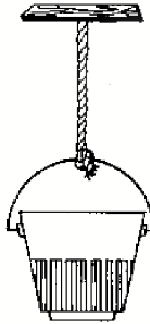



Figura 2.13: Balde e água em repouso em relação a Terra.

Consideramos agora o balde e a água girando juntos com uma velocidade angular constante ω em relação a um sistema inercial. A superfície da água fica côncava como representada na Figura 2.14.

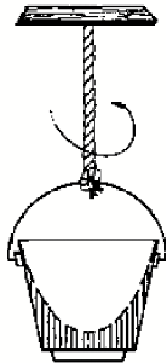



Figura 2.14: Balde e água girando juntos em relação a Terra.

A maneira mais simples de obter a forma da superfície quando o balde e a água giram com uma velocidade angular constante em relação à Terra é considerar um sistema de referência centrado na parte mais baixa da água girando, com o eixo z apontando verticalmente para cima, Figura 2.15.

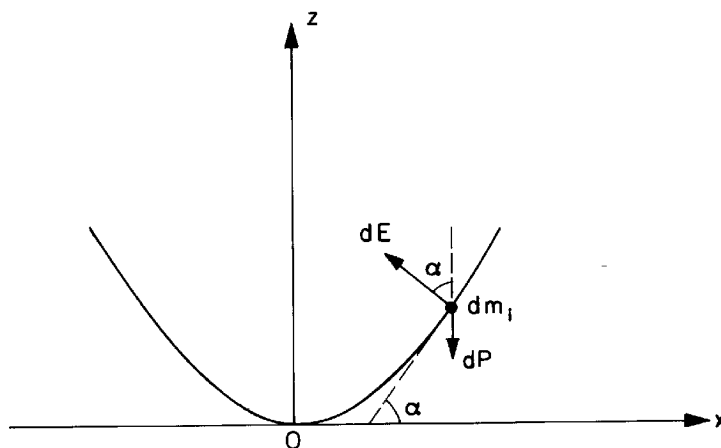



Figura 2.15: Água girando em relação a Terra.

Vamos considerar um pequeno volume de líquido com massa $dm_i = \rho dV$ logo abaixo da superfície. Ele sofre a força gravitacional para baixo $dP = dm_g g$ e uma força normal à superfície do líquido devido ao gradiente de pressão, dE. Como esta pequena porção de água move-se num círculo centrado no eixo z, não há uma força vertical resultante. Só vai haver uma força centrípeta resultante apontando em direção ao eixo z que muda a direção do movimento, mas não o módulo da velocidade tangencial. Da Figura 2.15 obtemos neste caso (x sendo a distância de dm_i ao eixo z):

$$dE \cos \alpha = dP = dm_g g \ ,$$

$$dE \sin \alpha = dm_i a_c = dm_i \frac{v_t^2}{x} = dm_i \omega^2 x \ .$$

Destas duas equações e utilizando que $dm_i = dm_g$ resulta:

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2}{g}x \ .$$

Utilizando que $\tan\alpha = dz/dx$, onde dz/dx é a inclinação da curva em cada ponto e o fato de que queremos a equação da curva que contém a origem $x = z = 0$ resulta:

$$z = \frac{\omega^2}{2g}x^2 \ . \tag{2.17}$$

Isto é, a curva é um parabolóide de revolução. Quanto maior for o valor de ω, maior será a concavidade da curva.

Podemos também calcular a pressão num ponto qualquer do líquido utilizando um raciocínio similar. Considere a Figura 2.16.

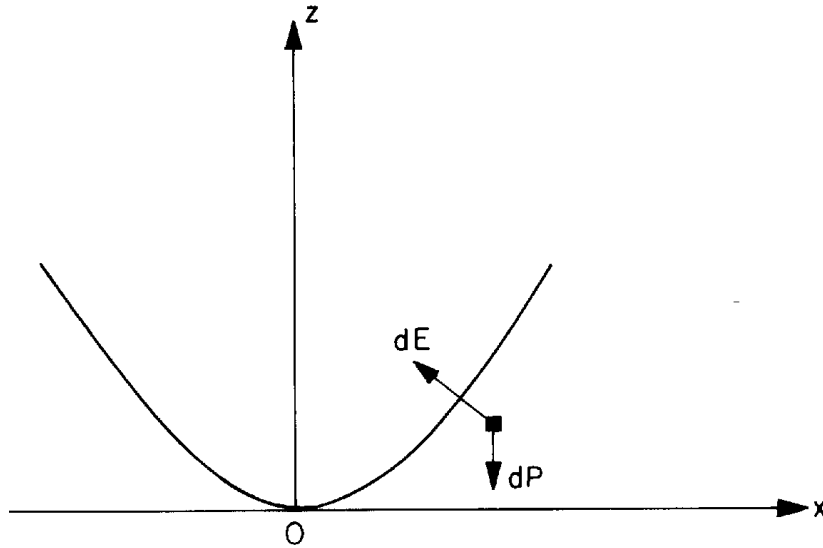



Figura 2.16: Pressão no interior de um líquido que gira junto com o balde.

A equação de movimento de uma pequena quantidade de água dm_i é $d\vec{P} + d\vec{E} = dm_i\vec{a}$, onde $d\vec{E}$ é a força devido ao gradiente de

pressão. Isto é, para o elemento de massa representado na Figura 2.16 resulta:

$$d\vec{E} = -(\nabla p)dV = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{z}\right)dV \ .$$

Utilizando que há apenas uma aceleração centrípeta, $\vec{a} = -(v^2/x)\hat{x} = -\omega^2 x\hat{x}$, que $d\vec{P} = -dm_g g\hat{z}$ e que $dm_i = dm_g$ resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \ ,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x \ .$$

A integração da primeira destas equações gera: $p = -\rho g z + f_1(x)$, onde $f_1(x)$ é uma função arbitrária de x. A integração da segunda equação gera: $p = \rho\omega^2 x^2/2 + f_2(z)$, onde $f_2(z)$ é uma outra função arbitrária de z. Igualando estas duas soluções e utilizando que $p(x = 0,\ z = 0) = p_o$ resulta na solução final para a pressão no interior do líquido, a saber:

$$p(x,\ z) = \frac{\rho\omega^2}{2}x^2 - \rho g z + p_o \ .$$

Em toda a superfície do líquido temos $p(x,\ z) = p_o$. Utilizando isto obtemos mais uma vez a equação da superfície côncava, ou seja, $z = \omega^2 x^2/2g$. Isto completa a solução do problema na mecânica clássica.

A importância desta experiência de Newton reside no fato de que ela mostra, para ele, como distinguir entre uma rotação absoluta e uma relativa. De acordo com Newton, a superfície da água será côncava apenas quando ela está girando em relação ao espaço absoluto. Isto significa que para ele o ω que aparece na Eq. (2.17) é a rotação angular da água em relação ao espaço absoluto e não a rotação da água em relação aos "corpos do ambiente." Isto é, este ω não representa a rotação da água em relação ao balde, nem em relação a Terra e nem mesmo a rotação em relação ao universo distante como as estrelas fixas. Lembre-se de que, para Newton, o espaço

absoluto não tem "relação com qualquer coisa externa," não estando, portanto, relacionado com a Terra nem com as estrelas fixas.

Mostramos aqui que Newton não tinha outra alternativa em sua época senão chegar a esta conclusão: Como a rotação angular do balde na experiência de Newton é muito maior do que a rotação diurna da Terra ou do que a rotação anual da Terra ao redor do Sol, podemos considerar a Terra como não estando acelerada em relação ao referencial das estrelas fixas e como um bom sistema inercial. Na primeira situação, o balde e a água estão em repouso em relação à Terra e, portanto, praticamente com velocidade constante em relação ao referencial das estrelas fixas. A superfície da água é plana e não há problemas em derivar esta conclusão. Agora consideramos a segunda situação na qual o balde e a água giram juntos em relação à Terra (o que é praticamente o mesmo que em relação às estrelas fixas) com uma velocidade angular constante $\vec{\omega}_{be} = \vec{\omega}_{we} \equiv \vec{\omega} = \omega\hat{z}$, onde o eixo z aponta verticalmente para cima naquele local ($\hat{z} = \hat{r}$, onde $\hat{r}$ aponta radialmente para fora a partir do centro da Terra, $\vec{\omega}_{be}$ é a velocidade do balde em relação à Terra e $\vec{\omega}_{we}$ é a rotação da água em relação à Terra). Neste caso a superfície da água é côncava, subindo em direção às paredes do balde. As principais questões que precisam ser respondidas e bem compreendidas são: Por que a superfície da água é plana na primeira situação e côncava na segunda? Qual é o responsável por este comportamento diferente? Este comportamento é devido à rotação da água com relação a quê?

Vamos responder a isto do ponto de vista newtoniano, analisando todas as possibilidades plausíveis. Há três suspeitos naturais principais para a concavidade da água: Sua rotação em relação ao balde, em relação à Terra, ou em relação às estrelas fixas. Que o balde não é o responsável pelo comportamento diferente da superfície da água pode ser percebido imediatamente observando que não há movimento relativo entre a água e o balde em ambas as situações enfatizadas acima. Isto significa que qualquer que seja a força exercida pelo balde sobre cada molécula da água na primeira situação, ela vai continuar a mesma na segunda situação, já que o balde ainda vai estar em repouso com relação à água.

O segundo suspeito é a rotação da água com relação à Terra.

Afinal de contas, na primeira situação a água estava em repouso com relação à Terra e a superfície da água era plana, mas quando a água estava girando com relação à Terra na segunda situação sua superfície ficou côncava. Logo, poderia ser esta rotação relativa entre a água e a Terra a responsável pela concavidade da superfície da água. Newton argumentou que este não é o motivo da concavidade ("E, portanto, esse esforço [de se afastar do eixo do movimento circular] não depende de qualquer translação da água com relação aos corpos do ambiente, nem pode o movimento circular verdadeiro ser definido por tal translação"). Mostramos aqui que Newton foi coerente e estava correto nesta conclusão utilizando sua própria lei da gravitação. Na primeira situação, a única força relevante exercida pela Terra sobre cada molécula da água é de origem gravitacional. Como vimos no Capítulo 1, utilizando a Eq. (1.4) e o teorema 31 de Newton obtemos que a Terra atrai qualquer molécula da água como se toda a Terra estivesse concentrada em seu centro, Eqs. (1.6) e (1.5): $\vec{P} = m_g\vec{g} = -m_g g\hat{z}$. Na segunda situação a água está girando em relação à Terra, mas a força exercida pela Terra sobre cada molécula da água ainda é dada simplesmente por $\vec{P} = -m_g g\hat{z}$ apontando verticalmente para baixo. Isto é devido ao fato de que a lei de Newton da gravitação (1.4) não depende da velocidade ou da aceleração entre os corpos interagentes. Isto significa que na mecânica newtoniana a Terra não pode ser a responsável pela concavidade da superfície da água. Estando a água em repouso ou girando em relação à Terra, ela vai sentir a mesma força gravitacional devido a Terra, a saber, o peso $\vec{P}$ apontando para baixo, sem qualquer componente tangencial perpendicular à direção z que dependa da velocidade ou da aceleração da água.

O terceiro suspeito é o conjunto das estrelas fixas. Na primeira situação a água está essencialmente em repouso ou com velocidade constante em relação a elas e sua superfície é plana. Já na segunda situação, a água está girando com relação a elas e sua superfície é côncava. Poderia ser esta rotação relativa entre a água e as estrelas fixas a responsável pela concavidade da água. Mas na mecânica newtoniana este também não é o caso. A única interação relevante da água com as estrelas fixas é de origem gravitacional. Vamos anali-

sar esta influência das estrelas na primeira situação. Como vimos no Capítulo 1, utilizando a Eq. (1.4) e o teorema 30 de Newton obtemos que a força resultante exercida por todas as estrelas fixas em qualquer molécula de água é essencialmente nula, supondo as estrelas fixas distribuídas mais ou menos homogeneamente no céu e desprezando as pequenas anisotropias em suas distribuições. Este é o motivo pelo qual as estrelas fixas raramente são mencionadas na mecânica newtoniana. Isto vai permanecer válido não apenas quando a água está em repouso com relação às estrelas fixas, mas também quando ela está girando com relação a elas. Mais uma vez isto é devido ao fato de que a lei de Newton da gravitação (1.4) não depende da velocidade ou da aceleração entre os corpos. Logo, seu resultado (1.6) vai permanecer válido não importando a velocidade ou aceleração do corpo 1 em relação à casca esférica.

Como vimos anteriormente, Newton estava ciente de que podemos desprezar a influência gravitacional do conjunto das estrelas fixas na maior parte das situações. Lembre-se de que ele afirmou no *Principia* que "as estrelas fixas, estando dispersas promiscuamente por todo o céu, destroem suas ações mútuas devido a suas atrações contrárias, pela Prop. 70, Livro I." A conclusão é então a de que a rotação relativa entre a água e as estrelas fixas também não é a responsável pela concavidade da água. Mesmo introduzindo as galáxias externas (que não eram conhecidas por Newton) não ajuda, pois sabe-se que elas estão distribuídas mais ou menos uniformemente no céu. Logo, a mesma conclusão a que Newton chegou com relação às estrelas fixas (que elas não exercem qualquer força resultante apreciável em outros corpos) é obtida com as galáxias distantes.

Uma conseqüência importante disto é que mesmo que as estrelas fixas e as galáxias distantes desaparecessem (fossem literalmente aniquiladas do universo) ou dobrassem de número e massa, isto não iria alterar a concavidade da água nesta experiência do balde. Elas não têm nenhuma relação com esta concavidade, pelo menos de acordo com a mecânica newtoniana.

Como o efeito da concavidade da água é real pois se pode medir o quanto a água sobe pelas paredes do balde (a água girando pode chegar até mesmo a entornar do balde se ω for muito grande), Newton

não tinha outra escolha senão apontar um outro responsável para este efeito, ou seja, a rotação da água em relação ao espaço absoluto. Esta era sua única alternativa, supondo a validade de sua lei da gravitação universal que ele estava propondo no mesmo livro onde apresentou a experiência do balde. Além disto, este espaço absoluto newtoniano não pode ter nenhuma relação com a massa ou quantidade de matéria da água, do balde, da Terra, das estrelas fixas, nem de qualquer outro corpo material, pois como acabamos de ver todas estas outras possíveis influências já foram eliminadas.

A explicação quantitativa desta experiência chave, sem introduzir o conceito de espaço absoluto, é uma das principais características da mecânica relacional desenvolvida neste livro.

2.5 Pêndulo Carregado Eletricamente

Vamos discutir agora o movimento de um pêndulo simples de comprimento ℓ e massa inercial m_i sofrendo pequenas oscilações devido a atração gravitacional da Terra. Novamente vamos supor a Terra como sendo um bom referencial inercial. A diferença em relação a Subseção 2.3.2 é que vamos supor que além de sua massa gravitacional m_g, o pêndulo está carregado com uma carga elétrica q e está na presença de um ímã permanente, como indicado na Figura 2.17.

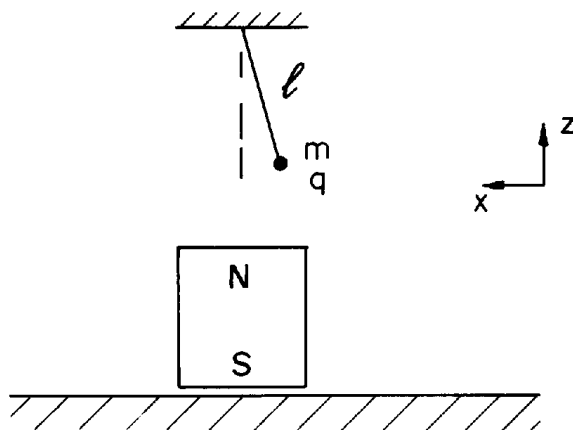



Figura 2.17: Pêndulo simples carregado oscilando próximo a um ímã.

Neste caso, o pêndulo vai sofrer não apenas a força gravitacional terrestre (o peso P) e a tração T do fio, mas também uma força magnética devido ao ímã. No eletromagnetismo clássico esta força é representada por $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade da carga q em relação a um referencial inercial (Terra ou laboratório neste caso), e $\vec{B}$ é o campo magnético gerado pelo ímã. Na eletrodinâmica de Weber vai se chegar essencialmente na mesma expressão para a força do ímã sobre a carga, embora sem necessariamente ter de falar em campo magnético e a velocidade $\vec{v}$ vai ser a velocidade da carga q em relação ao ímã ([Ass89b], [Ass92a], [Ass93a], [AT94] e [Ass94, Seções 6.7, 7.3 e 7.4]). Como estamos supondo o ímã parado em relação à Terra (que supomos ser um bom referencial inercial neste caso), não vai haver diferença fundamental entre as expressões da eletrodinâmica de Weber e do eletromagnetismo clássico para esta situação. Temos então um campo gravitacional $\vec{g} = -g\hat{z}$ uniforme apontando para baixo e um campo magnético $\vec{B} = |\vec{B}|\hat{z} = B\hat{z}$ apontando verticalmente para cima (vamos supor que este campo magnético é uniforme para simplificar as contas). A equação de movimento (1.3) fica então:

$$\vec{P} + \vec{T} + q\vec{v} \times \vec{B} = m_i\vec{a} \ . \tag{2.18}$$

Vamos supor pequenas oscilações ($\theta \ll \pi/2$) e que o pêndulo seja solto do repouso ($v_o = 0$) a partir do ponto $x_o = -|\theta_o|\ell$ com movimento inicial ao longo do plano xz. Com estas condições vem de (2.12) que na ausência do campo magnético a velocidade do pêndulo ao longo do eixo x é dada aproximadamente por

$$v_x \approx v_\theta = \ell\dot{\theta} = |\theta_o|\omega\ell \sin \omega t \ , \tag{2.19}$$

onde colocamos a fase inicial igual a zero devido a condição inicial de que o pêndulo partiu do repouso e θ_o é o ângulo inicial de onde parte o pêndulo. Colocamos $v_x \approx v_\theta$ porque para pequenas oscilações o movimento é praticamente ao longo da horizontal. Não havendo um campo magnético, o pêndulo permaneceria sempre oscilando ao longo do plano xz de nosso referencial inercial.

Supondo agora a presença do ímã, vem que o pêndulo não vai

mais ficar oscilando ao longo do mesmo plano. Sendo a velocidade inicial ao longo do eixo x, vem que o campo magnético vertical vai exercer uma força ao longo do eixo y dada por:

$$q\vec{v} \times \vec{B} = qv_x\hat{x} \times B\hat{z} = -qv_xB\hat{y} \ . \tag{2.20}$$

Esta força vai modificar o movimento do pêndulo como indicado na Figura 2.18. Nesta figura estamos vendo o pêndulo olhando de cima para baixo, como se estivéssemos em cima dele.

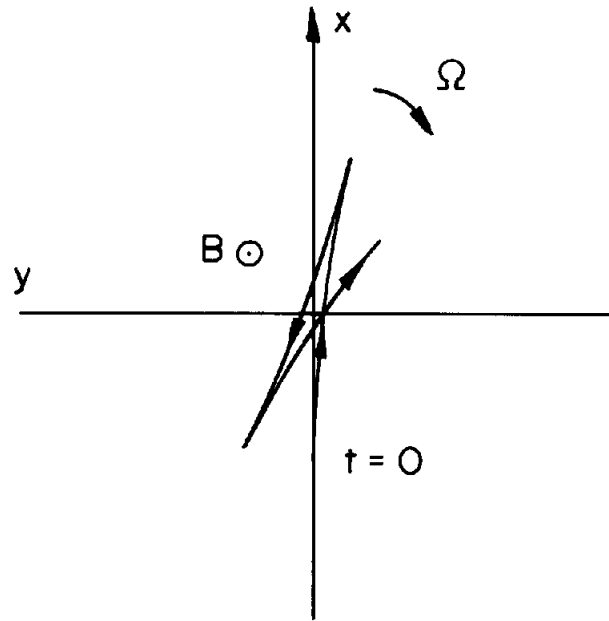



Figura 2.18: Desvio do movimento do pêndulo carregado na presença de um ímã.

Ou seja, supondo um movimento inicial na direção positiva do eixo x, $v_x > 0$, e uma carga positiva, $q > 0$, vem que o campo magnético vertical vai fazer com que o pêndulo se desvie para a direita, em direção a $y < 0$. Por outro lado, quando $q > 0$ e o pêndulo está voltando ($v_x < 0$) na presença do mesmo campo magnético, vem que

ele é desviado para a esquerda, em direção a $y > 0$. Isto faz com que o plano de oscilação do pêndulo gire no sentido horário com uma velocidade angular Ω (olhando-o de cima para baixo, supondo $q > 0$ e um campo magnético apontando verticalmente para cima). Vamos calcular Ω supondo um fraco campo magnético, isto é, $qB/m_i\omega \ll 1$ (isto é análogo a termos a velocidade máxima na direção x muito maior do que a velocidade máxima na direção y, ou a dizer que a velocidade na direção x quase não é afetada pelo ímã).

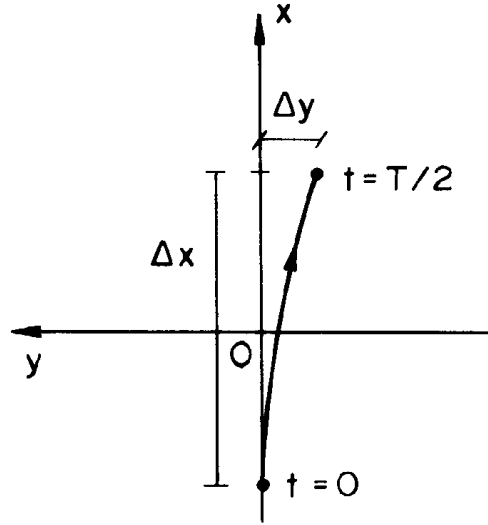



Figura 2.19: Geometria para o cálculo da precessão do plano de oscilação de um pêndulo carregado.

De (2.18), de (2.19) e de (2.20) vem que a equação de movimento na direção y é então (observando que $\vec{P} = -m_g g\hat{z}$ e que a tração $\vec{T}$ está no plano xz):

$$-qv_xB = -q|\theta_o|\ell\omega\sin\omega t = m_i a_y \; . \tag{2.21}$$

Esta equação pode ser facilmente integrada duas vezes usando $v_y(t = 0) = 0$ e $y(t = 0) = 0$ gerando:

$$y = \frac{qB|\theta_o|\ell}{m_i}\left(\frac{\sin \omega t}{\omega} t\right). \tag{2.22}$$

O valor de Ω pode ser calculado com o auxílio da Figura 2.19.

Em meio período $\triangle t = T/2 = \pi/\omega$ o pêndulo moveu-se de $x_o = -|\theta_o|\ell$ até $x = |\theta_o|\ell$, tal que $\triangle x = 2|\theta_o|\ell$. Por outro lado ele foi de $y_o = 0$ até $y = y(T/2) = -qB|\theta_o|\ell\pi/m_i\omega$, tal que $\triangle y = -qB|\theta_o|\ell\pi/m_i\omega$. O valor de Ω é então dado por:

$$\Omega = \frac{\triangle y/\triangle x}{\triangle t} = -\frac{qB}{2m_i} \ . \tag{2.23}$$

O valor negativo de Ω indica um giro no sentido horário quando visto de cima para baixo. Para chegar neste resultado desprezamos os atritos, supomos campos gravitacionais e magnéticos uniformes e verticais, e ainda $qB/m_i\omega \ll 1$.

Vemos então que o ímã causa uma precessão do plano de oscilação de um pêndulo carregado oscilando em um referencial inercial sob a ação de uma força gravitacional uniforme.

Capítulo 3

Sistemas de Referência Não Inerciais

Vamos discutir neste Capítulo alguns dos exemplos do Capítulo anterior, mas agora em sistemas de referência não inerciais S'. Como já vimos, a segunda lei do movimento de Newton é válida apenas no espaço absoluto ou em sistemas de referência que se movem com uma velocidade translacional constante com relação a ele, pelo seu quinto corolário. Estes são os chamados sistemas de referência inerciais que representamos por S. Quando o sistema de referência está acelerado em relação a um sistema inercial aparecem alguns problemas com a aplicação das leis do movimento de Newton. Analisamos estas situações aqui.

3.1. Força Constante

3.1.1 Queda Livre

A primeira situação é a de queda livre. Suponha que estamos caindo em direção à Terra. Supondo a Terra um referencial inercial S, nosso referencial S' que está em queda livre em relação à Terra é não inercial. Se tentássemos aplicar as leis de Newton para estudar nosso próprio movimento escreveríamos $F = m_i a'$ para achar nossa própria aceleração a' neste novo referencial S'. A única força atuando sobre nós é a atração gravitacional da Terra, tal que $F = m_g g$. Iríamos então concluir que $a' = g \approx 9,8\ m/s^2$, o que está errado. Afinal de contas estamos em repouso em relação a nós mesmos e o resultado correto a que deveríamos chegar é que $a' = 0$, Figura 3.1. Isto é, vemos a nós mesmos em repouso enquanto a Terra se aproxima de nós com uma aceleração $\vec{a}_e = g\hat{z}$, onde $\hat{z}$ aponta verticalmente para cima, da Terra para a gente.

Para chegar no resultado correto precisamos escrever a segunda lei de Newton na forma

$$\vec{F} - m_i\vec{a}_o = m_i\vec{a}' \ , \tag{3.1}$$

onde $\vec{a}_o$ é a nossa aceleração em relação ao espaço absoluto, ou em relação a um sistema de referência inercial e $\vec{a}'$ é a aceleração da massa m_i em relação a S'. Neste caso $\vec{a}_o = \vec{g} = -g\hat{z}$ (supondo que a Terra seja um referencial inercial, desprezando assim os pequenos efeitos devidos ao aspecto não inercial da rotação da Terra). Utilizando isto e o fato de que $\vec{F} = m_g\vec{g}$, chegaríamos que nossa aceleração com relação a nós mesmos seria dada por (como sempre usando também que $m_i = m_g$): $\vec{a}' = 0$. E esta é a resposta correta no nosso sistema de referência.

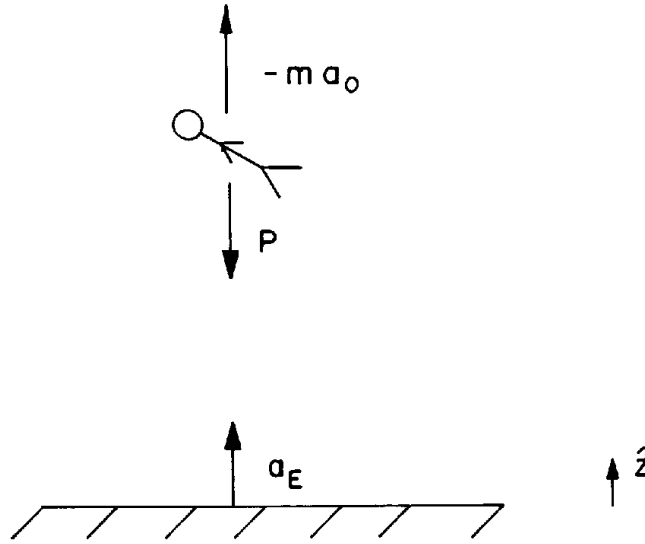



Figura 3.1: Uma pessoa analisando sua própria queda em direção ao solo.

A força $-m_i\vec{a}_o$ é chamada de força fictícia. O motivo para este nome é que todas as outras forças que aparecem no $\vec{F}$ da Eq. (3.1) têm uma origem física devido às interações do corpo de prova com

outros corpos, como a interação gravitacional entre ele e a Terra ou o Sol, uma interação elástica com uma mola, uma interação elétrica ou magnética com uma outra carga ou com um ímã, uma força de atrito devido a sua interação com um meio resistivo etc. Por outro lado, na mecânica clássica a força $-m_i\vec{a}_o$ não tem origem física, isto é, não é devido a uma interação do corpo de prova com qualquer outro corpo. Ela só aparece em sistemas de referência não inerciais que estão acelerados em relação ao espaço absoluto. Pelo menos esta é a interpretação usual na mecânica newtoniana. Mais tarde veremos que este não é o caso na mecânica relacional.

Apesar deste caráter fictício, esta força $-m_i\vec{a}_o$ é essencial em sistemas de referência não inerciais para se chegar aos resultados corretos utilizando as leis do movimento de Newton.

3.1.2 Trem Acelerado

O segundo exemplo analisado aqui é o de um trem acelerado. Mais uma vez fazemos a aproximação de que a Terra é um bom referencial inercial nesta situação. No Capítulo anterior analisamos o movimento e a inclinação do pêndulo num sistema de referência fixo em relação à Terra. Agora analisamos o mesmo problema num sistema de referência fixo no vagão acelerado (podemos analisar a situação do ponto de vista de um passageiro que está viajando no trem, Figura 3.2). Neste caso, o corpo de massa m ligado ao fio está em repouso em relação ao trem e ao passageiro, enquanto a Terra está acelerada para a esquerda com uma aceleração dada por $\vec{a}_e = -a_e\hat{x}$.

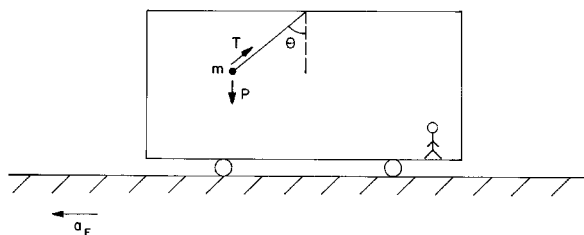



Figura 3.2: Passageiro num trem acelerado.

Se o passageiro aplicasse a segunda lei de Newton para o corpo de massa m na forma da Eq. (1.3) ele chegaria na mesma conclusão que as Eqs. (2.6), (2.7) e (2.8), ou seja:

$$a' = g\frac{m_g}{m_i}\tan\theta \neq 0 \ .$$

Mas obviamente esta é a resposta errada neste sistema de referência do trem. Afinal de contas o pêndulo não está se movendo em relação ao trem ou ao passageiro na situação de equilíbrio que está sendo analisada aqui, de tal forma que o passageiro deveria chegar em $a' = 0$. Ele só pode chegar neste resultado com a Eq. (3.1). Isto é, ele precisa introduzir a força fictícia $-m_i\vec{a}_o$ para chegar na resposta correta em seu referencial. No caso que está sendo analisado aqui temos $\vec{a}_o = a_e\hat{x}$. Esta força fictícia equilibra a força gravitacional exercida pela Terra e a força exercida pelo fio, de tal forma a não produzir movimento do pêndulo em relação ao trem ou ao passageiro e para mantê-lo numa posição inclinada em relação à vertical, como representado na Figura 3.2. Ele então chega na situação descrita na Figura 3.3:

$$\vec{P} + \vec{T} - m_i\vec{a}_o = m_i\vec{a}' \ ,$$

de tal forma que $\vec{a}' = 0$.

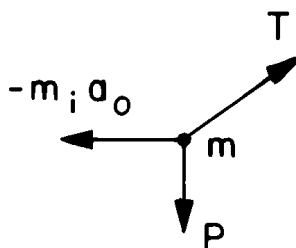



Figura 3.3: Forças no sistema de referência do passageiro.

Neste sistema de referência a componente vertical da tensão no fio é equilibrada pelo peso do corpo, enquanto que $-m_i\vec{a}_o$ equilibra a componente horizontal da tensão no fio. Isto mantém o corpo de massa m em repouso em relação ao trem.

Mais uma vez na mecânica newtoniana não há uma origem física para esta força $-m_i\vec{a}_o$. Mas é essencial utilizá-la no sistema de referência acelerado do trem para chegar aos resultados corretos.

3.2 Movimento Circular Uniforme

Agora analisamos alguns problemas do Capítulo anterior no sistema de referência dos corpos que giram.

3.2.1 Órbita Circular de um Planeta

Começamos com o planeta orbitando ao redor do Sol. Novamente vamos considerar apenas o caso particular de órbita circular. No sistema de referência inercial S considerado anteriormente, com a massa do Sol sendo muito maior do que a massa do planeta, o Sol foi considerado essencialmente em repouso e o planeta estava orbitando ao redor dele. A aplicação da Eq. (1.3) resultou numa aceleração centrípeta dada por $a_{cp} = Gm_s/r^2$.

Analisamos agora este problema num sistema de referência não inercial S' no qual o Sol e o planeta estão em repouso. Ou seja, num sistema de referência S' centrado no Sol mas que gira junto com o planeta. Ao fazer as contas neste sistema deveríamos concluir que o planeta não está acelerado, isto é, que $a' = 0$. Mas este não é o caso se aplicarmos a segunda lei de Newton na forma da Eq. (1.3). Como podemos explicar neste novo sistema de referência o fato de que o planeta permanece em repouso apesar da atração gravitacional do Sol? Como pode o planeta manter uma distância essencialmente constante em relação ao Sol? Para chegar ao resultado correto de que o planeta não está acelerado neste novo sistema de referência e para explicar porquê a distância entre o planeta e o Sol permanece constante, precisamos introduzir uma nova força fictícia. Neste caso, esta força fictícia tem um nome especial, força centrífuga. Ela é dada por:

$$\vec{F}_c = -m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \; , \tag{3.2}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição do corpo de prova em relação à origem do sistema de referência não inercial e $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular do sistema de referência não inercial em relação ao espaço absoluto, ou em relação a qualquer sistema de referência inercial. No Capítulo anterior consideramos o sistema inercial S centrado no Sol. Neste sistema S o planeta orbitava ao redor do Sol com uma velocidade angular ω. O sistema de referência não inercial S' considerado aqui também é centrado no Sol, mas ele gira em relação a S com a mesma velocidade angular da órbita do planeta, Figura 3.4.

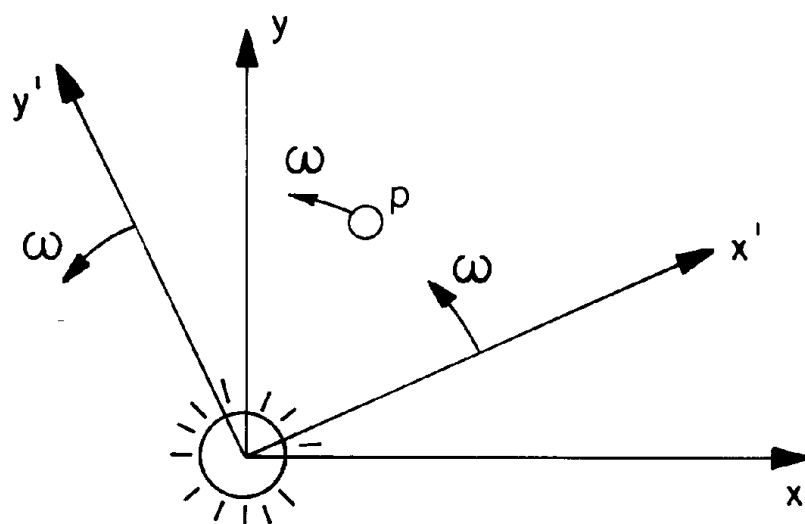



Figura 3.4: Sistema de referência S' girando junto com o planeta em relação a S.

Isto é, se o planeta fosse a Terra, o período de rotação de S' em relação a S seria $T = 2\pi/\omega = 365$ dias. Se o sistema de referência não inercial S' está girando em relação a S ao redor do eixo vertical z, $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$. Então $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2\rho\hat{\rho}$, onde ρ é a distância do corpo de prova ao eixo de rotação e $\hat{\rho}$ é o vetor unitário apontando do eixo de rotação para o corpo, num plano ortogonal ao eixo de rotação (coordenadas polares: $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$). Neste caso a força centrífuga é dada simplesmente por $\vec{F}_c = m_i\omega^2\rho\hat{\rho}$. Isto mostra que esta força

fictícia, que aparece apenas em sistema de referência não inerciais S' mas não nos inerciais S, tem uma propriedade de apontar para fora do centro. Este é o motivo do nome "centrífuga," Figura 3.5. O termo força centrífuga havia sido cunhado por Huygens, enquanto Newton cunhou o termo força centrípeta para se opor a ele. Na mecânica newtoniana as forças reais são as centrípetas, enquanto que as centrífugas como neste caso não têm origem física, isto é, não surgem devido a uma interação do corpo de prova com outros corpos.

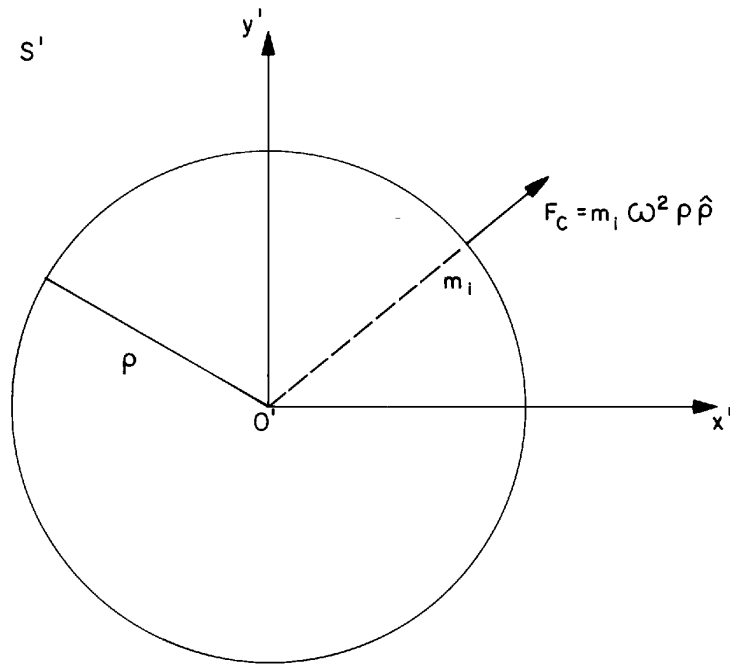



Figura 3.5: Força centrífuga.

Neste sistema de referência não inercial a segunda lei de Newton deve ser escrita como (para se chegar em respostas corretas):

$$\vec{F} + \vec{F}_c = m_i \vec{a}' \ , \tag{3.3}$$

onde $\vec{F}$ é a força resultante devido a todos os outros corpos agindo

em m_i, $\vec{F}_c$ é dada pela Eq. (3.2) e $\vec{a}'$ é a aceleração de m_i em relação a este sistema de referência não inercial.

No problema do planeta temos a situação da Figura 3.6.

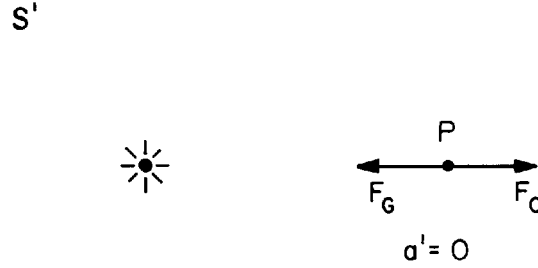



Figura 3.6: Planeta "orbitando" ao redor do Sol, como visto em S'.

Utilizando que $\vec{a}' = 0$ neste sistema de referência obtém-se a força centrífuga, ou seja

$$\vec{F}_c = G\frac{m_{gs}m_{gp}}{r^2}\hat{r} = -m_{ip}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \ .$$

Disto resulta: $\omega = \sqrt{Gm_{gs}/r^3}$. Alternativamente, poderíamos utilizar que $\omega = \sqrt{Gm_{gs}/r^3}$ para obter que $\vec{a}' = 0$ no sistema de referência S' no qual o planeta e o Sol estão em repouso.

Mais uma vez não há uma origem física para esta força centrífuga, enquanto que a força gravitacional neste caso é devido à atração entre o Sol e o planeta.

3.2.2 Dois Globos

Discutimos agora brevemente o experimento dos dois globos descrito por Newton. Num sistema de referência S' que gira com os globos centrado no centro de massa do sistema, temos a situação representada na Figura 3.7.

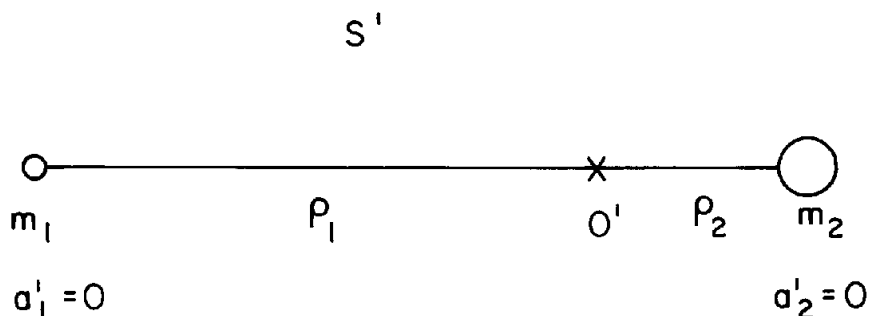



Figura 3.7: Dois globos.

Neste sistema de referência não há movimento dos globos apesar da tensão T na corda. A força centrípeta devido a esta tensão é equilibrada por uma força centrífuga dada por $m_i\omega^2\rho$, Figura 3.8: $F_{c1} = m_1\omega^2\rho_1 = T$ e $F_{c2} = m_2\omega^2\rho_2 = T$.

Figura 3.8: Tensão na corda equilibrada pela força centrífuga.

Há duas interpretações para este equilíbrio: (A) Podemos dizer que a tensão é equilibrada pela força centrífuga, que não deixa os corpos se aproximarem; ou (B) podemos dizer que a força centrífuga gera a tensão na corda.

Poderíamos aplicar facilmente a mesma análise do problema anterior do Sol e do planeta, generalizando-a para levar em conta o movimento do Sol, substituindo a tensão T deste exemplo pela atração gravitacional $Gm_{g1}m_{g2}/r^2$. Nesta situação mais realística, o Sol e o planeta orbitariam ao redor do centro de massa comum, em relação a um sistema de referência inercial S. Num sistema de referência não inercial S' centrado no centro de massa e no qual o Sol e o planeta estão em repouso, a atração gravitacional seria equilibrada pela força centrífuga.

3.2.3 A Experiência do Balde de Newton

Consideramos agora a experiência do balde. Vamos nos concentrar na situação em que o balde e a água giram juntos com uma velocidade angular constante ω em relação a um sistema de referência inercial S. Num sistema de referência não inercial S' que gira com o balde não há movimento da água, de tal forma que a Eq. (3.3) se reduz a (usando a Eq. (3.2) e que $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$):

$$-(\nabla p)dV - dm_g g\hat{z} + dm_i\omega^2\rho\hat{\rho} = dm_i\vec{a}' = 0 \ .$$

E isto gera o mesmo resultado obtido anteriormente, lembrando que $dm_i = dm_g$ e que estamos utilizando aqui $\rho\hat{\rho}$ ao invés de $x\hat{x}$ para representar a distância ao eixo de rotação.

É importante enfatizar aqui e nos exemplos anteriores da órbita circular do planeta e dos dois globos, que esta força centrífuga não tem origem física na mecânica newtoniana. Ela só aparece em sistemas de referência não inerciais e neste sentido pode-se dizer que elas são reais (equilibram a força de atração do Sol, geram a tensão na corda no problema dos dois corpos, empurram a água para os lados do balde etc.). Por outro lado, ao contrário de todas as forças físicas reais como a atração gravitacional exercida pelo Sol ou pela Terra, a força elétrica exercida pelas cargas, a força magnética exercida por ímãs ou por fios com corrente, ou a força elástica exercida por molas ou por fios tensionados, não podemos localizar o corpo material responsável pelas forças centrífugas ou pelas forças fictícias em geral. Vamos mostrar isto no caso da experiência do balde (uma análise similar pode ser feita para os outros exemplos discutidos acima). Vamos considerar a situação na qual o balde e a água estão girando juntos em relação à Terra e às estrelas fixas com uma velocidade angular constante ao redor do eixo vertical. Analisamos agora este problema no sistema de referência não inercial do balde, de tal forma que neste referencial a superfície da água é côncava, embora a água esteja em repouso. É o balde o responsável por esta concavidade? Não, afinal de contas o balde está em repouso em relação à água. É a rotação da Terra em relação à água, ao balde e a este sistema de referência a responsável pela força centrífuga? Mais uma vez a res-

posta na mecânica newtoniana é não. Como vimos no Capítulo 1, a força gravitacional exercida por uma casca esférica em partículas materiais localizadas fora dela apontam em direção ao centro da casca. Como a lei de Newton da gravitação não depende da velocidade ou da aceleração entre os corpos, ela vai permanecer válida quando a casca esférica está girando. Isto significa que de acordo com a teoria newtoniana, mesmo quando a Terra está girando em relação a um certo conjunto de corpos ou sistema de referência, ela vai continuar exercendo apenas a força gravitacional usual para baixo, sem qualquer força horizontal como é a força centrífuga neste caso. É então a rotação das estrelas fixas (ou das galáxias distantes) em relação à água, ao balde e a este sistema de referência não inercial a responsável pela força centrífuga? A resposta é negativa mais uma vez, devido ao 30^o teorema de Newton apresentado acima e ao resultado (1.6). Isto é, distribuições esfericamente simétricas de matéria não exercem forças gravitacionais resultantes em quaisquer partículas internas, não interessando a rotação ou movimento destas distribuições esféricas em relação às partículas internas ou a quaisquer sistemas de referência. Isto significa que na mecânica newtoniana as estrelas fixas e as galáxias distantes podem desaparecer sem causar qualquer influência sobre a concavidade da água.

Como veremos, a mecânica relacional dará uma resposta diferente nesta e em outras situações.

3.3 Rotação da Terra

Há duas maneiras principais de saber que a Terra está em rotação. A primeira é cinemática e a outra dinâmica. Discutimos estes tópicos nesta Seção.

3.3.1 Rotação Cinemática da Terra

A maneira mais simples de saber que a Terra gira em relação a alguma coisa é observando os corpos astronômicos. Não observamos diretamente a rotação da Terra, afinal de contas estamos em repouso em relação a ela. Mas olhando para o Sol, vemos que ele gira ao redor

da Terra com um período de um dia. Há duas interpretações óbvias para este fato: A Terra está em repouso (como no sistema ptolomaico) e o Sol translada ao redor da Terra, ou o Sol está em repouso e a Terra gira ao redor de seu eixo (como no sistema copernicano). Representamos estas interpretações na Figura 3.9, considerando o referencial representado pelo papel como sendo o sistema de repouso.

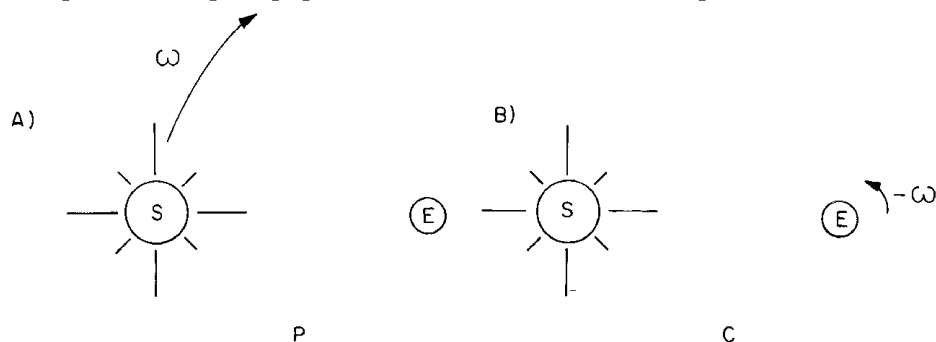



Figura 3.9: Rotação relativa entre a Terra (E) e o Sol (S) nos sistemas ptolomaico (P) e copernicano (C).

Podemos adicionar movimentos comuns para a Terra e para o Sol (como, por exemplo, uma rotação ou uma translação em relação ao espaço absoluto) sem alterar o movimento relativo entre ambos. É importante perceber aqui que a partir da rotação relativa observada entre o Sol e a Terra, não podemos determinar qual deles está realmente se movendo em relação ao espaço absoluto. A única coisa observada e medida neste caso é o movimento relativo entre ambos. Neste sentido os sistemas ptolomaico e copernicano são igualmente razoáveis e compatíveis com as observações. Escolher entre um ou outro sistema é puramente uma questão de gosto considerando apenas este movimento relativo entre ambos.

Um outro tipo de rotação cinemática da Terra é aquela em relação às estrelas fixas, ou seja, em relação às estrelas que pertencem a nossa galáxia, a Via Láctea. Embora a Lua, o Sol, os planetas e os cometas estejam em movimento em relação ao pano de fundo das estrelas, não há praticamente nenhum movimento perceptível de uma estrela em relação as outras. O céu visto hoje em dia com suas constelações

de estrelas é essencialmente o mesmo céu visto pelos antigos gregos ou egípcios. Embora o conjunto das estrelas gire em relação à Terra, elas quase não se movem umas em relação as outras e por este motivo elas são usualmente chamadas de estrelas fixas. Embora a paralaxe estrelar tenha sido predita por Aristarco de Samos ao redor de 200 a. C., a primeira observação desta paralaxe (movimento ou mudança de posição de uma estrela em relação as outras) só foi feita incontrovertidamente por F. W. Bessel em 1838. Se tirarmos uma fotografia do céu noturno com uma longa exposição observamos no hemisfério Norte que todas as estrelas giram aproximadamente ao redor da estrela polar norte com um período típico de um dia.

Mais uma vez podemos dizer tanto que a rotação real pertence às estrelas enquanto a Terra está parada, ou então que pertence à Terra girando enquanto as estrelas estão em repouso. Não podemos decidir entre estas duas interpretações baseados apenas nestas observações. Pode ser mais simples descrever os movimentos e as órbitas planetárias no referencial em repouso com as estrelas fixas, chamado por isto de referencial das estrelas fixas, do que no sistema de referências fixo com a Terra, referencial terrestre, mas ambos referenciais são igualmente razoáveis.

Com um período de rotação de um dia obtemos $\omega_k = 2\pi/T = 7 \times 10^{-5}\ rad/s$, onde ω_k é a rotação angular cinemática da Terra. A direção do eixo desta rotação cinemática é aproximadamente a direção da estrela polar norte. Desta maneira temos uma descrição completa da rotação cinemática, ou seja, da rotação da Terra em relação às estrelas fixas.

Para simplificar a análise não estamos aqui distinguindo entre o dia solar e o dia sideral (tempo para as estrelas fixas darem uma volta sobre a Terra). Estamos colocando os dois como sendo 24 horas. Na verdade, enquanto que a duração do dia sideral é essencialmente constante (quando comparado, por exemplo, com um relógio mecânico ou atômico), o mesmo não acontece com o dia solar cuja duração varia ao longo dos meses do ano. Isto já era conhecido desde pelo menos Ptolomeu (100 - 170 d.C.), que apresentou a assim chamada "equação do tempo" descrevendo a variação do dia solar comparado com o dia sideral. O dia solar médio (obtido por uma média ao longo

de todo o ano da duração dos dias solares) tem por definição 24 horas, enquanto que o valor medido do dia sideral é de 23 horas, 56 minutos e 4 segundos. Ou seja, em um ano o Sol dá essencialmente 365 voltas ao redor da Terra enquanto que as estrelas dão 366 voltas. Outra diferença é que enquanto as estrelas sempre nascem aproximadamente no mesmo ponto do horizonte terrestre, o mesmo já não acontece com o Sol que nasce em posições diferentes do horizonte ao longo do ano. Para uma discussão destes pontos ver [Kuh57, págs. 9-10 e 266-268] e [Bar89, Seções 3.15 e 11.6]. Newton fala da equação do tempo no Escólio ao final de suas definições. Na Proposição XVII, Teorema XV, Livro III do *Principia* ele afirma: "Os movimentos diários dos planetas são uniformes. (...) Júpiter gira, em relação as estrelas fixas, em 9^h 56^m; Marte em 24^h 39^m; Vênus em aproximadamente 23^h; a Terra em 23^h 56^m; o Sol em $25^{1/2d}$, e a Lua em 27^d 7^h 43^m. (...)" Já na Seção [35] de seu *Sistema do Mundo* afirma: "Os planetas giram ao redor de seus eixos uniformemente em relação às estrelas; estes movimentos são bem adaptados para a medida do tempo." A grande importância desta afirmação é que Newton está apresentando uma maneira operacional de se medir o tempo absoluto. O curioso é que esta medida tem a ver com a rotação diária dos planetas ao redor de seus eixos em relação às estrelas fixas, enquanto que por sua definição o tempo absoluto não deveria ter relação com nada externo (ou seja, nem com os planetas nem com as estrelas fixas). Para uma discussão geral sobre o conceito de tempo, na física, ver [CR78], [Whi89] e [Mel90].

Hoje em dia temos duas outras rotações cinemáticas da Terra. A primeira é a rotação da Terra em relação ao conjunto de galáxias distantes. A realidade das galáxias externas foi estabelecida por Hubble em 1924 quando ele determinou (após encontrar estrelas cefeidas variáveis nas nebulosas) que as nebulosas são sistemas estrelares fora da Via Láctea. Podemos então determinar cinematicamente nossas velocidades translacional e rotacional em relação ao sistema isotrópico de galáxias. Este é o sistema de referência em relação ao qual as galáxias não têm velocidade translacional ou rotacional como um todo, no qual as galáxias estão essencialmente em repouso umas em relação as outras e em relação a este referencial, a não ser pelas

velocidades peculiares. A velocidade angular de rotação da Terra em relação a este referencial das galáxias é essencialmente a mesma que aquela em relação às estrelas fixas.

A segunda rotação cinemática moderna da Terra é sua rotação em relação à radiação cósmica de fundo, também chamada de CBR (iniciais da expressão em inglês Cosmic Background Radiation). Esta radiação foi descoberta por Penzias e Wilson em 1965, [PW65]. Esta radiação tem um espectro de corpo negro com uma temperatura característica de 2.7 K. Embora esta radiação seja altamente isotrópica, há uma anisotropia de dipolo devido ao nosso movimento em relação a esta radiação. Este movimento gera desvios Doppler que são detectados e medidos. Desta maneira podemos, ao menos em princípio, determinar não apenas nossa velocidade de translação mas também a de rotação em relação a este referencial no qual a radiação é essencialmente isotrópica.

Indicamos aqui quatro rotações cinemáticas diferentes da Terra. Elas estão relacionadas com um movimento relativo entre a Terra e corpos astronômicos externos, ou entre a Terra e uma radiação externa. Não podemos determinar por quaisquer destes meios qual corpo está realmente girando, se a Terra ou se os corpos distantes e a radiação externa. Até agora podemos adotar qualquer ponto de vista sem problemas adicionais, ou seja: a Terra está em repouso (em relação ao espaço absoluto de Newton, por exemplo) e estes corpos giram ao redor da Terra, ou estes corpos estão essencialmente em repouso e é a Terra que gira ao redor de seu eixo (em relação ao espaço absoluto de Newton, por exemplo).

Na próxima Seção veremos como distinguir entre estes dois pontos de vista dinamicamente.

3.3.2 A Forma da Terra

A maneira mais simples de saber que a Terra é um sistema de referência não inercial é observando sua forma elipsoidal. Isto é, a Terra é achatada nos pólos. Newton discutiu isto nas Props. 18 e 19 do Livro III do *Principia*:

Proposição 18. Teorema 16

> *Os eixos dos planetas são menores do que os diâmetros perpendiculares aos eixos.*
>
> A gravitação igual das partes sobre todos os lados daria uma forma esférica aos planetas, não fosse por suas revoluções diurnas num círculo. Devido a este movimento circular acontece de as partes que se afastam do eixo tentam subir ao redor do equador; e, portanto, se a matéria está em um estado fluído, por sua subida em direção ao equador ela vai aumentar os diâmetros de lá e por sua descida dos pólos ela vai diminuir o eixo. Assim, o diâmetro de Júpiter (pelas observações coincidentes dos astrônomos) é encontrado ser mais curto de pólo a pólo do que de Leste a Oeste. E, pelo mesmo argumento, se nossa Terra não fosse mais alta ao redor do equador do que nos pólos, os mares abaixariam ao redor dos pólos e, subindo em direção ao equador, colocariam todas as coisas sob a água.

Proposição 19. Problema 3

> *Achar a proporção do eixo de um planeta para os diâmetros perpendiculares a ele.*
>
> (...); e, portanto, o diâmetro da Terra no equador está para seu diâmetro de pólo a pólo como 230 para 229. (...)

E esta previsão teórica de Newton (até sua época não havia nenhuma determinação deste fato) é bem precisa quando comparada com as determinações experimentais modernas, [New34, págs. 427 e 664, nota 41] e [Mar89].

O motivo deste achatamento da Terra nos pólos na mecânica newtoniana é a rotação da Terra em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial. A Terra e todos os sistemas de referência que estão em repouso em relação a ela são não inerciais.

Por este motivo precisamos de introduzir no referencial da Terra uma força centrífuga $-\omega_d^2\rho\hat{\rho}$ para poder aplicar as leis de Newton aqui e obter os resultados corretos. Aqui ω_d é a rotação dinâmica da Terra em relação ao espaço absoluto ou em relação a qualquer sistema inercial de referência. Em princípio ela não tem nenhuma relação com a rotação cinemática ω_k discutida anteriormente. No referencial terrestre é esta força centrífuga a responsável pelo achatamento da Terra. Num sistema de referência inercial, o achatamento da Terra é explicado por sua rotação dinâmica em relação a este sistema inercial. De acordo com a mecânica de Newton mesmo se as estrelas e galáxias distantes desaparecessem ou não existissem, a Terra ainda seria achatada nos pólos devido a sua rotação em relação ao espaço absoluto. Veremos depois que a mecânica relacional dá uma previsão diferente neste caso.

Apresentamos aqui alguns resultados quantitativos para este caso. Vamos supor o globo terrestre composto apenas de água com uma densidade constante α em qualquer ponto de seu interior. Assumimos ainda que a Terra gira com uma velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega_d\hat{z}$ em relação a um referencial inercial, onde escolhemos para simplificar a análise o eixo z como estando ao longo do eixo de rotação. A equação de movimento para um elemento de massa da água dm com volume infinitesimal dV $(dm = \alpha dV)$ é dada por

$$dm\vec{g} - (\nabla p)dV = dm\vec{a} \ . \tag{3.4}$$

Nesta equação $\vec{g}$ é o campo gravitacional onde dm está localizada devido a todo o restante de massa terrestre e $-\nabla p dV$ é o empuxo devido ao gradiente da pressão p. Vamos resolver esta equação utilizando coordenadas esféricas (r, θ, φ) com origem no centro da Terra. Como o único movimento de dm é uma órbita circular ao redor do eixo z vem que sua aceleração é simplesmente a centrípeta dada por $\vec{a} = \vec{\omega}_d \times (\vec{\omega}_d \times \vec{r}) = -\omega_d^2\rho\hat{\rho} = -\omega_d^2\rho(\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta)$, onde ρ é a distância de dm ao eixo z (e não até a origem, sendo esta última distância dada por $r = \rho/\sin\theta$). Além disto, $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\rho}$ são os vetores unitários ao longo das direções r e θ (coordenadas esféricas) e ρ (coordenadas cilíndricas), respectivamente. O gradiente da pressão pode

ser expresso em coordenadas cilíndricas ou esféricas, sem problemas. Para resolver esta equação precisa-se da expressão do campo gravitacional. Como uma primeira aproximação (ver [Sym82, Exercício 7.10]) pode-se usar o campo gravitacional de uma distribuição esfericamente simétrica de matéria de raio R e massa $M = 4\pi R^3\alpha/3$. Utilizando-se a Eq. (1.6) pode-se mostrar facilmente que o campo gravitacional num ponto $\vec{r}$ no interior desta casca esférica é dado por: $\vec{g} = -GMr\hat{r}/R^3$. Resolvendo-se a equação acima como foi feito no caso do balde obtém-se a pressão num ponto qualquer do fluído como sendo

$$p = -\frac{GM\alpha r^2}{2R^3} + \frac{\alpha\omega_d^2 r^2 \sin^2\theta}{2} + \frac{GM\alpha}{2R} + P_o \ , \tag{3.5}$$

onde P_o é a pressão atmosférica sobre o pólo norte ($r = R$ e $\theta = 0$). As superfícies de p constante são elipsóides. Fazendo-se $p = P_o$ no equador $\theta = \pi/2$ acha-se a maior distância que a água se afasta da origem ($R_>$), ou seja (supondo $\omega_d^2 R^3/2GM \ll 1$ como acontece no caso da rotação diurna da Terra):

$$\frac{R_>}{R} \approx 1 + \frac{\omega_d^2 R^3}{2GM} \approx 1,0017 \ . \tag{3.6}$$

Para chegar neste número colocamos $\omega_d = 7,3 \times 10^{-5}\ s^{-1}$ (período de um dia), $R = 6,36 \times 10^6\ m$, $G = 6,67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$ e $M = 6 \times 10^{24}\ kg$.

Este valor é aproximadamente metade do que se observa ao fazer as medidas sobre a Terra. O problema com este cálculo é que devido a rotação da Terra ela muda de forma, ficando aproximadamente elipsoidal. O campo gravitacional tanto dentro quanto fora da Terra não é mais então aquele devido a uma esfera. Para se chegar num resultado mais preciso da Eq. (3.4) é necessário utilizar o campo gravitacional de um elipsóide. Este campo pode ser obtido seguindo, por exemplo, o caminho indicado nos exercícios 6.17 e 6.21 de [Sym82]. Não vamos apresentar aqui todas as contas mas apenas os resultados a que chegamos seguindo estes cálculos. Seja então um elipsóide centrado na origem e com semi-eixos a, b e c ao longos dos eixos x, y e z, respectivamente, tal que $a = b = R_>$ e $c = R_< = R_>(1 - \eta)$

com $\eta \ll 1$. Vamos supor novamente uma densidade de matéria α constante em todos os pontos do elipsóide. Sendo M a massa total do elipsóide e R seu raio médio temos: $M = 4\pi R^3\alpha/3 = 4\pi R_>^2 R_<\alpha/3$. A energia potencial gravitacional U entre duas massas m_1 e m_2 separadas por uma distância r é dada por $U = -Gm_1m_2/r = m_1\Phi(\vec{r}_1)$, onde $\Phi(\vec{r}_1)$ é o campo gravitacional no ponto onde está m_1, $\vec{r}_1$, devido a massa m_2 localizada em $\vec{r}_2$. Analogamente, podemos calcular o potencial gravitacional num ponto qualquer do espaço devido a massa do elipsóide. O potencial gravitacional Φ que encontramos num ponto dentro do elipsóide é (até primeira ordem em η):

$$\Phi = -\frac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2) - \frac{GM}{R^3}\frac{\eta r^2}{5}(1 - 3\cos^2\theta) \ . \qquad (3.7)$$

Já o potencial fora do elipsóide é dado por (novamente até primeira ordem em η):

$$\Phi = -\frac{GM}{r}\left[1 + \frac{\eta R^2}{5r^2}(1 - 3\cos^2\theta)\right]. \qquad (3.8)$$

A energia potencial dU de um elemento de massa dm interagindo com este elipsóide é dada por $dU = dm\Phi$. A força exercida pelo elipsóide sobre dm é dada por $d\vec{F} = -\nabla(dU) = -dm\nabla\Phi = dm\vec{g}$. Aplicando isto nos resultados acima vem que o campo gravitacional no interior do elipsóide é dado por (novamente até primeira ordem em η):

$$\vec{g} = -\frac{GMr}{R^3}\left\{\left[1 - \frac{2}{5}\eta(1 - 3\cos^2\theta)\right]\hat{r} - \frac{6}{5}\eta\sin\theta\cos\theta\hat{\theta}\right\} \ . \qquad (3.9)$$

O fato de que a força gravitacional no interior de um elipsóide, ao longo de cada eixo, cresce linearmente com a distância até a origem era bem conhecido de Newton (*Principia*, Livro I, Prop. 91, Prob. 45, Cor. III; ver também [Mar89]).

Já fora do elipsóide vem:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\left\{\left[1 + \frac{3}{5}\frac{R^2}{r^2}\eta(1 - 3\cos^2\theta)\right]\hat{r} - \frac{6}{5}\frac{R^2}{r^2}\eta\sin\theta\cos\theta\hat{\theta}\right\} . \qquad (3.10)$$

O campo gravitacional na superfície do elipsóide é dado por:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{R^2}\left(1 + \frac{3}{5}\eta + \eta\frac{\cos^2\theta}{5}\right) . \tag{3.11}$$

Desta relação vem que a força sobre um ponto na superfície do elipsóide no pólo ($r = R_<$, $\theta = 0$) para a força sobre um ponto na superfície do elipsóide mas sobre o equador ($r = R_>$, $\theta = \pi/2$) é dada por

$$\frac{F_{polo}}{F_{equador}} \approx 1 + \frac{\eta}{5}. \tag{3.12}$$

Até aqui foi suposto um corpo elipsoidal em repouso em relação a um referencial inercial.

Pode-se agora aplicar a Eq. (3.9) na Eq. (3.4). Neste caso η vai ter de ser determinado mas pela análise do caso anterior de uma Terra esférica girando, espera-se que η seja da mesma ordem de grandeza que $\omega_d^2 R^3/GM$. Com (3.9) em (3.4) obtém-se a seguinte expressão para a pressão p num ponto qualquer no interior da Terra fluída:

$$p = -\frac{G\alpha M r^2}{2R^3}\left(1 + \frac{4}{5}\eta\right) + \left(\frac{\omega_d^2}{2} + \frac{3}{5}\eta\frac{GM}{R^3}\right)\alpha r^2 \sin^2\theta + C , \tag{3.13}$$

onde C é uma constante.

Igualando a pressão em $r = R_<$, $\theta = 0$ com a pressão em $r = R_>$, $\theta = \pi/2$, usando $\eta \ll 1$, $\omega_d^2 R^3/GM \ll 1$ e que η é da mesma ordem de grandeza que $\omega_d^2 R^3/GM$ fornece $\eta = 5\omega_d^2 R^3/4GM$. Isto é,

$$\frac{R_>}{R_<} \approx 1 + \eta \approx 1 + \frac{5\omega_d^2 R^3}{4GM} \approx 1,0043 . \tag{3.14}$$

E este é essencialmente o valor dado por Newton, $R_>/R_< \approx 230/229 \approx 1,0044$.

É importante observar aqui duas coisas. A primeira é que para obtermos este resultado utilizamos conjuntamente a rotação da Terra e o campo gravitacional de um elipsóide (o resultado anterior (3.6) não deu algo preciso pois foi suposto um campo gravitacional devido a uma esfera). E o segundo ponto é que o ω_d que aparece em (3.14)

é a rotação da Terra em relação ao espaço absoluto ou a um referencial inercial. Em princípio este ω_d não tem nada a ver com a rotação cinemática da Terra ω_k que discutimos anteriormente. Só que para chegarmos no valor correto do achatamento da Terra como observado através de medidas ($R_>/R_< \approx 1,004$) é necessário que se tenha $\omega_d \approx 7,3 \times 10^{-5}/s^{-1}$, que é o mesmo valor da rotação diurna cinemática da Terra em relação às estrelas fixas! Isto não deve ser uma coincidência, a questão é encontrar uma ligação entre estes dois fatos.

3.3.3 Pêndulo de Foucault

A demonstração mais impressionante da rotação da Terra foi obtida em 1851 por Foucault (1819-1868). A referência original em francês é [Fou51a] e sua tradução para o inglês se encontra em [Fou51b]. A importância desta experiência é que ela pode ser realizada numa sala fechada de tal forma que podemos obter a rotação da Terra sem olhar para o céu.

A experiência consiste simplesmente em um longo pêndulo que oscila para frente e para trás muitas vezes com um grande período. Ele utilizou inicialmente um pêndulo com um comprimento de 2 metros com uma esfera de 5 kg oscilando harmonicamente. Depois ele utilizou um outro pêndulo com um fio de comprimento 11 metros. O período de um pêndulo simples de comprimento l é $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, onde $g \approx 9,8\ m/s^2$. Desprezando a resistência do ar, se todas as forças agindo sobre o pêndulo fossem a atração gravitacional da Terra (o peso $\vec{P} = -mg\hat{r}$) e a tensão no fio, o pêndulo oscilaria sempre no mesmo plano. Mas não é isto o que acontece. O plano de oscilação muda lentamente com o tempo em relação à superfície da Terra, com uma velocidade angular Ω. Na mecânica newtoniana isto é explicado com uma outra força fictícia, a força de Coriolis dada por $-2m_i\vec{\omega}_d \times \vec{v}$, onde $\vec{\omega}_d$ é a rotação angular da Terra em relação a um sistema de referência inercial (a força centrífuga não muda o plano de oscilação e assim não a consideramos aqui para simplificar a análise). Coriolis (1792-1843) descobriu esta força em 1831 enquanto realizava seu doutoramento sob a orientação de Poisson, [Cra90].

A maneira mais simples de entender este comportamento é considerar um pêndulo oscilando no pólo Norte. O pêndulo vai manter seu plano de oscilação fixo em relação a um sistema de referência inercial (ou em relação ao espaço, como em geral se afirma). Como a Terra está girando embaixo dele, o plano de oscilação vai mudar em relação à Terra com uma velocidade angular $-\vec{\omega}_d = -\omega_d \hat{z}$, já que a Terra está girando em relação ao sistema inercial com uma velocidade angular $\vec{\omega}_d = \omega_d \hat{z}$. No equador, o pêndulo de Foucault não precessa já que então $\vec{\omega}_d \times \vec{v}$ é nulo (quando $\vec{v} = \pm v\hat{z}$) ou então aponta verticalmente ao longo do comprimento do fio (quando há uma componente da velocidade perpendicular a $\hat{z}$ e $\hat{r}$). Em geral a precessão do pêndulo em relação à Terra é dada por $-\omega_d \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre a direção radial $\hat{r}$ (a direção na qual o pêndulo permanece em repouso sem oscilar) e o eixo de rotação da Terra $\vec{\omega}_d/\omega_d = \hat{z}$, Figura 3.10.

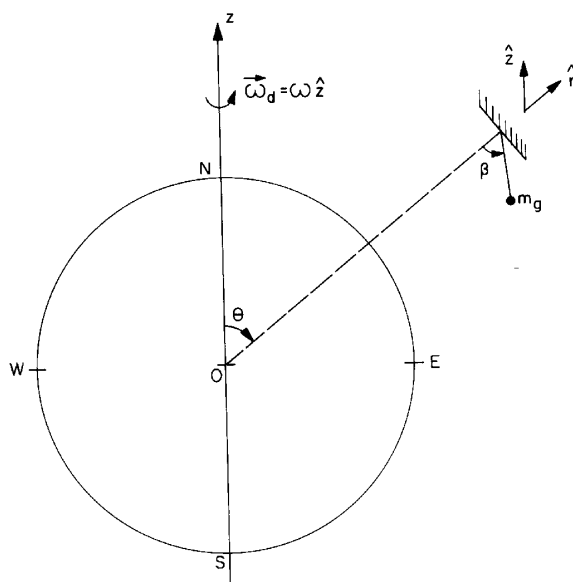



Figura 3.10: Pêndulo de Foucault.

Derivamos este resultado aqui utilizando algumas aproximações que são válidas no problema. Em primeiro lugar desprezamos a resistência do ar e a força centrífuga. A equação de movimento no referencial não inercial da Terra é então dada por:

$$\vec{T} + m_g\vec{g} - 2m_i\vec{\omega}_d \times \vec{v} = m_i\vec{a} \ .$$

Aqui $\vec{T}$ é a tensão no fio. A novidade comparada com a equação de movimento do pêndulo simples num referencial inercial é a introdução da força de Coriolis $-2m_i\vec{\omega}_d\times\vec{v}$, onde $\vec{\omega}_d$ é a rotação angular dinâmica da Terra em relação ao espaço absoluto ou a um referencial inercial.

Escolhemos um novo sistema de coordenadas (x', y', z') com sua origem O' diretamente abaixo do ponto de apoio, no ponto de equilíbrio da massa do pêndulo, com o eixo z' apontando verticalmente para cima: $\hat{z}' = \hat{r}$. O eixo x' é escolhido de tal forma que o pêndulo oscilaria completamente no plano $x'z'$ não fosse a força de Coriolis, Figura 3.11.

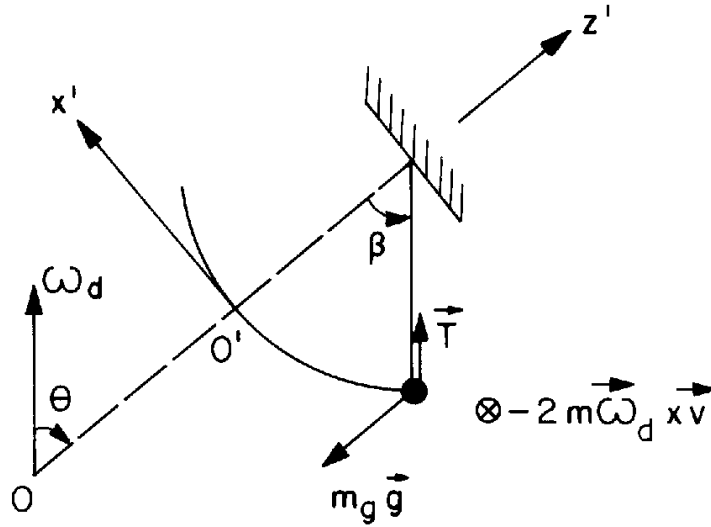



Figura 3.11: Forças no pêndulo de Foucault.

Neste sistema de coordenadas temos $\vec{\omega}_d = \omega_d \sin\theta\hat{x}' + \omega_d\cos\theta\hat{z}'$. O ângulo de oscilação do pêndulo com a vertical a partir do ponto de su-

porte é chamado de β. Para $\beta \ll \pi/2$ podemos usar a aproximação de pequenas amplitudes de oscilação de tal forma que a equação de movimento gera a solução aproximada (não levando em conta por hora a força de Coriolis): $\beta = \beta_o \cos\omega_o t$, onde $\omega_o = \sqrt{g/l}$ é a freqüência natural de oscilação do pêndulo e β_o é o ângulo no qual o pêndulo foi solto do repouso. Como temos pequenas amplitudes de oscilação, o movimento do pêndulo é essencialmente horizontal com $x' = l\beta$, de tal forma que $\vec{v} \approx -\dot{x}'\hat{x}' = l\beta_o\omega_o \sin\omega_o t\hat{x}'$. A única componente da força na direção y' é dada pela força de Coriolis $-2m_i\vec{\omega}_d \times \vec{v}$. Com os valores anteriores para $\vec{\omega}_d$ e $\vec{v}$ obtemos que a equação de movimento na direção y' fica na forma:

$$\ddot{y}' = -2(\omega_d \cos\theta) l\beta_o\omega_o \sin\omega_o t \ .$$

Integrando esta equação duas vezes e utilizando que $\dot{y}'(t=0) = 0$ e $y'(t=0) = 0$ resulta:

$$y' = 2\omega_d \cos\theta l\beta_o \left(\frac{\sin\omega_o t}{\omega_o} - t \right) \ .$$

Entre $t = 0$ e $t = T/2 = \pi/\omega_o$ a massa do pêndulo moveu-se na direção y' de $\triangle y' = -2\omega_d \cos\theta l\beta_o \pi/\omega_o$. Durante este tempo o movimento na direção x' foi de $\triangle x' = 2l\beta_o$, Figura 3.12. Isto significa que o plano de oscilação do pêndulo moveu-se por um ângulo de $\triangle y/\triangle x = -\omega_d \cos\theta\pi/\omega_o$. A rotação angular Ω do plano de oscilação é esta quantidade dividida pelo intervalo de tempo $\triangle t = T/2 - 0 = \pi/\omega_o$, de tal forma que:

$$\Omega = -\omega_d \cos\theta \ .$$

Foucault chegou num resultado análogo a este mas não apresentou os cálculos para isto. Ele o apresentou dizendo que a rotação angular do plano de oscilação é igual a rotação angular da Terra multiplicada pelo seno da latitude, [Fou51a] e [Fou51b]. No caso de Paris, onde Foucault realizou suas experiências, temos uma latitude $\alpha = 48^o 51'$. Como o ângulo da latitude é dado por $\alpha = \pi/2 - \theta$ obtemos o resultado de Foucault:

$$\Omega = -\omega_d \cos(\pi/2 - \alpha) = \omega_d \sin\alpha \ .$$

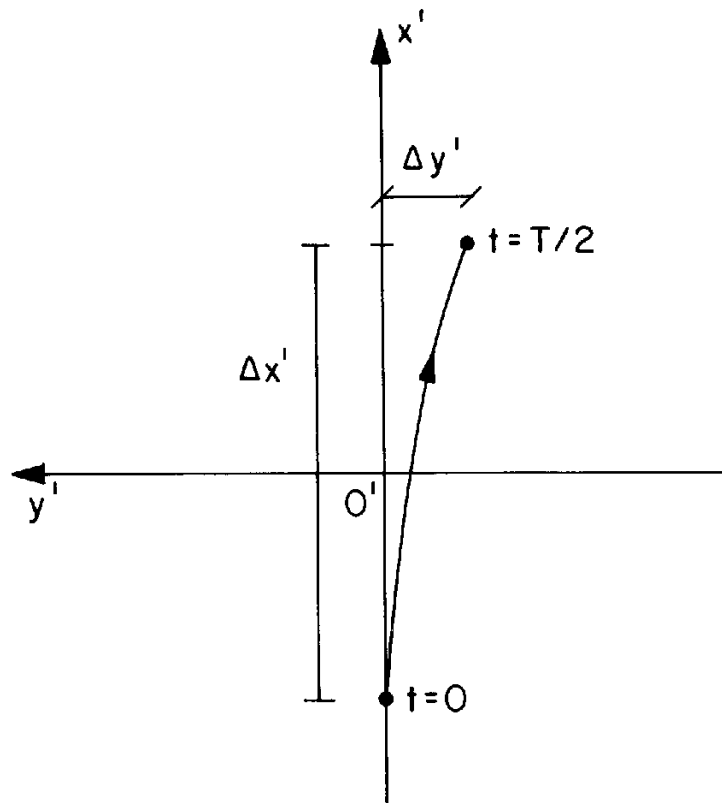



Figura 3.12: Rotação do plano de oscilação.

É curioso observar Foucault descrevendo sua experiência pois, às vezes, fala da rotação da Terra em relação ao espaço e, às vezes, em relação às estrelas fixas (esfera celeste). Ou seja, ele não distingue estas duas rotações ou os dois conceitos (rotação dinâmica em relação ao espaço absoluto e rotação cinemática em relação aos corpos celestes). Por exemplo, ele começa afirmando que a precessão do plano de oscilação do pêndulo prova a rotação diária da Terra. Para justificar esta interpretação do resultado experimental ele imagina um pêndulo colocado exatamente sobre o pólo norte oscilando para frente e para trás num plano fixo, enquanto a Terra gira embaixo do pêndulo. Ele então afirma (nossas ênfases em negrito, [Fou51a] e [Fou51b]): "Assim é gerado um movimento de oscilação num arco de círculo cujo

plano é determinado claramente, ao qual a inércia da massa fornece uma posição invariável **no espaço**. Caso estas oscilações continuem por um certo tempo, o movimento da Terra, que não pára de girar de oeste para leste, vai se tornar perceptível por uma comparação com a imobilidade do plano de oscilação, **cujo traçado sobre o solo vai aparecer como tendo um movimento em conformidade com o movimento aparente da esfera celeste**; e se as oscilações pudessem continuar por vinte e quatro horas, o traçado de seu plano executaria neste tempo uma revolução completa ao redor da projeção vertical de seu ponto de suspensão."

As contas da precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault gerando $\Omega_F = -\omega_d \cos\theta$ foram análogas às contas da precessão do plano de oscilação de um pêndulo carregado eletricamente na presença de um ímã gerando $\Omega_B = -qB/2m$. A diferença é que neste último caso estávamos em um referencial inercial e a precessão foi devido a interação do pêndulo carregado com o ímã. Por outro lado, no pêndulo de Foucault temos um pêndulo neutro eletricamente e não encontramos o agente material (análogo ao ímã do outro exemplo) que causou a precessão do plano de oscilação. A força de Coriolis $-2m_i\vec{\omega}_d \times \vec{v}$ é chamada de fictícia pois só aparece em referenciais não inerciais que giram em relação ao espaço absoluto. Por outro lado, a força magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$ é devido a uma interação real entre a carga q e a fonte de $\vec{B}$ (ímã, solenóide, casca esférica carregada eletricamente girando, etc.) No referencial terrestre vemos o conjunto de estrelas e galáxias distantes girando ao nosso redor com um período de um dia em relação ao eixo norte-sul, isto é, na direção da estrela polar norte. Na mecânica newtoniana este conjunto de cascas esféricas girando ao redor da Terra não gera nenhuma força resultante sobre o pêndulo, esteja ele parado ou em movimento em relação à Terra. Poderia-se pensar que este conjunto de cascas esféricas compostas de estrelas e galáxias, ao girarem ao redor da Terra, gerariam uma espécie de campo magnético-gravitacional $\vec{B}_g$ que explicaria a força de Coriolis por uma interação gravitacional análoga a força magnética, isto é, com uma força do tipo $m_g\vec{v} \times \vec{B}_g$. Porém, isto não acontece na mecânica newtoniana. Veremos que há algo análogo a $m_g\vec{v} \times \vec{B}_g$ na teoria da relatividade geral de Einstein, mas que não tem o mesmo

valor que a força de Coriolis. Por outro lado, na mecânica relacional vai aparecer este termo com o valor preciso da força de Coriolis.

Max Born discutiu diversos exemplos de corpos em rotação e os efeitos dinâmicos que aparecem, apresentando a conclusão fundamental da mecânica newtoniana em termos bem simples e claros: "Parece assim que a ocorrência das forças centrífugas é universal e não pode ser devido a interações" [Bor65, págs. 78-85], ver especialmente a pág. 84.

3.3.4 Comparação entre as Rotações Cinemática e Dinâmica da Terra

Analisamos aqui estas duas rotações da Terra. A rotação cinemática é uma rotação relativa entre a Terra e os corpos que a circundam como o Sol, as estrelas fixas, as galáxias distantes e a CBR. O período de rotação é essencialmente um dia ($\omega_k \approx 7 \times 10^{-5}\ rad/s$) e a direção é Norte-Sul terrestre (isto é, apontando em direção a estrela polar norte no hemisfério Norte). Esta rotação cinemática pode ser igualmente atribuída na mecânica clássica a dois motivos opostos: a rotação dos corpos externos enquanto a Terra permanece em repouso, ou a um giro da Terra ao redor de seu eixo enquanto os corpos externos permanecem essencialmente em repouso. Não podemos distinguir estas duas situações cinematicamente.

Uma rotação completamente diferente da Terra é obtida por sua forma achatada e pelo pêndulo de Foucault. A rotação obtida dinamicamente por estes meios é uma rotação da Terra em relação a um sistema de referência inercial. De acordo com a mecânica newtoniana estes efeitos dinâmicos (deformação da forma esférica da Terra ou rotação do plano de oscilação do pêndulo) só podem ser explicados por uma rotação da Terra em relação ao espaço absoluto ou a um referencial inercial. Estes efeitos não apareceriam se a Terra estivesse em repouso em relação ao espaço absoluto e se os corpos que a circundam (as estrelas fixas e galáxias distantes) estivessem girando na direção oposta em relação ao espaço absoluto. A rotação cinemática seria a mesma neste último caso, mas os efeitos dinâmicos não apareceriam. Veremos que E. Mach tinha um ponto de vista diferente, ou seja,

que se a situação cinemática é a mesma, então os efeitos dinâmicos também têm de ser os mesmos. A mecânica relacional implementa esta idéia de Mach quantitativamente.

As medidas das rotações cinemática e dinâmica da Terra coincidem entre si. Isto é, a rotação determinada ao se observar as estrelas cinematicamente acontece de ter o mesmo valor e direção que a rotação determinada numa sala fechada com um pêndulo de Foucault. Na mecânica clássica isto é uma grande coincidência, não se encontrando uma explicação para este fato impressionante. Da mesma forma a mecânica clássica não oferece uma explicação do motivo pelo qual $m_i = m_g$ (ou $m_i = \alpha m_g$). Classicamente podemos apenas dizer que a natureza acontece de ser assim, mas um entendimento mais profundo não é obtido. A massa inercial de um corpo não precisava estar relacionada com sua massa gravitacional. Ela poderia ser uma propriedade completamente independente do corpo sem qualquer relação com m_g ou com qualquer outra propriedade, seja ela elétrica, magnética, elástica, nuclear etc. do corpo. Ou então ela poderia depender de uma propriedade química ou nuclear do corpo mas não de m_g, sem que isto entrasse em conflito com qualquer lei da mecânica clássica. Apenas acontece de experimentalmente se encontrar a inércia de um corpo proporcional a seu peso, ou $m_i = m_g$. Uma situação similar acontece com a igualdade entre as rotações cinemática e dinâmica da Terra. Este fato indica que o universo como um todo não gira em relação ao espaço absoluto ou em relação a qualquer sistema de referência inercial. A Terra gira ao redor de seu eixo com um período de um dia ($T = 8,640 \times 10^4\ s$), ou com uma velocidade angular $\omega = 2\pi/T = 7 \times 10^{-5}\ rad/s$. A Terra orbita ao redor do Sol com um período de um ano ($T = 3,156 \times 10^7\ s$), ou com uma freqüência angular $\omega = 2 \times 10^{-7}\ rad/s$. O sistema planetário orbita ao redor do centro de nossa galáxia com um período de $2,5 \times 10^8\ anos$, ($T = 8 \times 10^{15}\ s$), ou com uma freqüência angular $\omega \approx 8 \times 10^{-16}\ rad/s$. A maior parte dos corpos astronômicos do universo gira, exceto o universo como um todo. Por que o universo como um todo não gira em relação ao espaço absoluto? Não há explicação para este fato na mecânica clássica. Este é um fato observacional mas nada na mecânica clássica obriga a natureza a se

comportar assim. As leis da mecânica continuariam a valer se o universo como um todo estivesse girando em relação ao espaço absoluto. Apenas precisaríamos levar em conta este efeito ao fazer os cálculos (isto ocasionaria um achatamento na distribuição de galáxias, similar ao achatamento dos pólos da Terra devido a sua rotação diária, ou a forma essencialmente plana do sistema solar ou de nossa galáxia devido a rotação dos planetas ao redor do Sol, ou das estrelas ao redor do centro da Via Láctea).

Estas duas coincidências da mecânica clássica ($m_i = m_g$ e $\vec{\omega}_k = \vec{\omega}_d$) formam a principal base empírica que leva ao princípio de Mach.

3.4 Força Fictícia Geral

Num sistema inercial S escrevemos a segunda lei de Newton como:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \ ,$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula m em relação a origem O de S.

Suponha agora que temos um sistema não inercial S' localizado por um vetor $\vec{h}$ em relação a S ($\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{h}$, sendo $\vec{r}\,'$ o vetor posição de m em relação a origem O' de S'), movendo-se em relação a ele com uma velocidade translacional $d\vec{h}/dt$ e uma aceleração translacional $d^2\vec{h}/dt^2$. Suponha ainda que seus eixos x', y', z' giram com uma velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação aos eixos x, y, z de S. A segunda lei de movimento de Newton deve ser escrita neste referencial não inercial S' levando em conta as "forças fictícias" completas, ou seja ([Sym82], Capítulo 7):

$$m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$
$$- 2m\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}\,'}{dt} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' - m\frac{d^2\vec{h}}{dt^2} \ . \qquad (3.15)$$

O segundo termo à direita é chamado de força centrífuga, o terceiro termo é chamado de força de Coriolis, enquanto que o quarto e o quinto termos não têm nomes especiais. Todas estas são "forças

fictícias" na mecânica newtoniana, que só aparecem nestes referenciais não inerciais. Embora os efeitos gerados por estas forças nestes referenciais não inerciais sejam reais (achatamento da Terra, forma côncava da água na experiência do balde, ...), não conseguimos encontrar uma origem física para estas forças. Isto é, não conseguimos encontrar o corpo responsável por elas nem o tipo de interação que as causa (se gravitacional, elétrica, magnética, elástica etc). Com certeza na mecânica clássica estas forças fictícias não são causadas pelas estrelas fixas ou pelas galáxias distantes já que estes corpos podiam desaparecer ou não existir (ou mesmo dobrar de número e massa) que estas forças continuariam a existir em qualquer referencial acelerado em relação ao espaço absoluto. Por este motivo elas receberam o nome de forças "fictícias."

Capítulo 4

Paradoxo Gravitacional

Discutimos aqui o paradoxo gravitacional. Para referências ver: [Nor65], Capítulo 2 (Cosmological difficulties with the newtonian theory of gravitation), págs. 16-23; [Jam69], pág. 194; [Jak90], Capítulo 8 (The gravitational paradox of an infinite universe), págs. 189-212; [Ass92f]; [Ass93c] e [Ass94], Capítulo 7, págs. 203-222.

4.1 Newton e o Universo Infinito

As concepções cosmológicas de Isaac Newton foram analisadas claramente por E. Harrison num artigo muito interessante: [Har86]. Este artigo mostra que nos primeiros anos da década de 1660 Newton acreditava que o espaço se estendia infinitamente em todas as direções e era eterno em duração. O mundo material, por outro lado, era para ele de uma extensão finita. Isto é, ele ocupava um volume finito de espaço e estava envolto por um espaço infinito vazio de matéria.

Após sua completa formulação da gravitação universal na década de 1680, Newton ficou ciente de que as estrelas fixas atraíam umas às outras com uma força gravitacional. No Escólio Geral ao fim do *Principia* ele disse: "Este sistema maravilhoso do Sol, planetas e cometas, só poderia provir do conselho e domínio de um Ser inteligente e poderoso. E se as estrelas fixas são os centros de outros sistemas similares, estes, sendo formados por um conselho sábio semelhante, devem estar todos sujeitos ao Seu domínio; especialmente pela luz das estrelas fixas ser da mesma natureza que a luz do Sol e a partir de cada sistema a luz passa para todos os outros sistemas. E para evitar que os sistemas de estrelas fixas caíssem uns sobre os outros por suas gravidades, ele colocou estes sistemas a distâncias imensas uns dos outros." Contudo, esta solução de colocar as estrelas fixas muito distantes umas das outras não evita o problema de que se o universo existiu por um tempo infinito, então uma quantidade finita de matéria, ocupando um volume finito, iria finalmente colapsar para

seu centro devido à atração gravitacional da matéria interior.

Numa correspondência com o teólogo Richard Bentley em 1692-1693, Newton percebeu este fato e mudou sua visão cosmológica. Isto é, ele abandonou a idéia de um universo material finito circundado por um vazio infinito e defendeu a idéia de um mundo material infinito espalhado pelo espaço infinito. Vejamos o que ele escreveu em sua primeira carta a Bentley ([Coh78], pág. 281):

> Relativo a sua primeira questão, parece a mim que se a matéria de nosso Sol e planetas e toda a matéria do universo fosse espalhada uniformemente por todo o céu e toda partícula tivesse uma gravidade inata em direção a todo o restante e todo o espaço através do qual esta matéria estivesse espalhada fosse porém finito, então a matéria da parte externa deste espaço tenderia devido a sua gravidade em direção a toda matéria do interior e como conseqüência, cairia para o meio de todo o espaço lá compondo uma grande massa esférica. Mas, se a matéria fosse distribuída uniformemente por todo um espaço infinito, ela nunca poderia se juntar em uma massa, mas parte dela se juntaria em uma massa e outra parte em outra [massa], de tal forma a formar um número infinito de grandes massas, espalhadas a grande distância, umas das outras, por todo este espaço infinito. E assim poderiam ser formados o Sol e as estrelas fixas, supondo que a matéria fosse de uma natureza lúcida.

Isto é, com uma quantidade infinita de matéria distribuída mais ou menos homogeneamente por todo o espaço infinito, haveria aproximadamente a mesma quantidade de matéria em todas as direções. Com isto não haveria um centro do mundo no qual toda a matéria colapsaria. Mas então, duzentos anos depois, algumas pessoas acharam uma situação paradoxical com este tipo de sistema cosmológico. Este é o assunto das próximas seções.

4.2 O Paradoxo Baseado na Força

Há um paradoxo simples e profundo que aparece com a lei de Newton da gravitação, em um universo infinito que contém uma quantidade infinita de matéria. A maneira mais simples de apresentar este paradoxo é a seguinte: Suponha um universo infinito sem fronteiras contendo uma distribuição homogênea de matéria. Representamos sua densidade constante e finita de massa gravitacional por ρ. Para simplificar a análise, lidamos aqui com uma distribuição contínua de matéria se estendendo uniformemente para o infinito em todas as direções. Calculamos então a força gravitacional exercida por este universo infinito em uma partícula teste com massa gravitacional m (ou ρdV, sendo dV seu volume infinitesimal) localizada num ponto P, ver Figura 4.1.

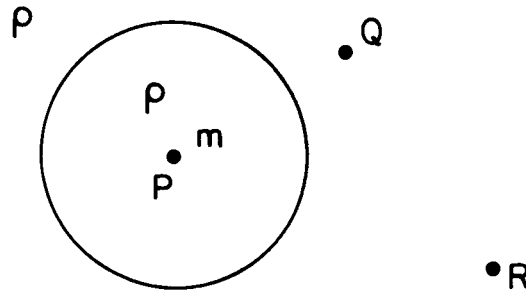



Figura 4.1: Universo infinito e homogêneo.

Se calculamos a força com nosso sistema de coordenadas centrado em P, todo o universo será equivalente a uma série infinita de cascas esféricas centradas em P. Pela Eq. (1.6) obtemos que não vai haver força resultante atuando em m. Isto era esperado por questão de simetria.

Agora vamos calcular a força em m utilizando um sistema de coordenadas centrado em Q, Figura 4.2.

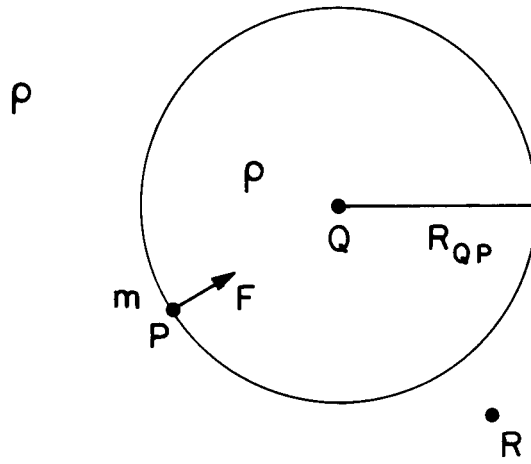



Figura 4.2: Força em m calculada a partir de Q.

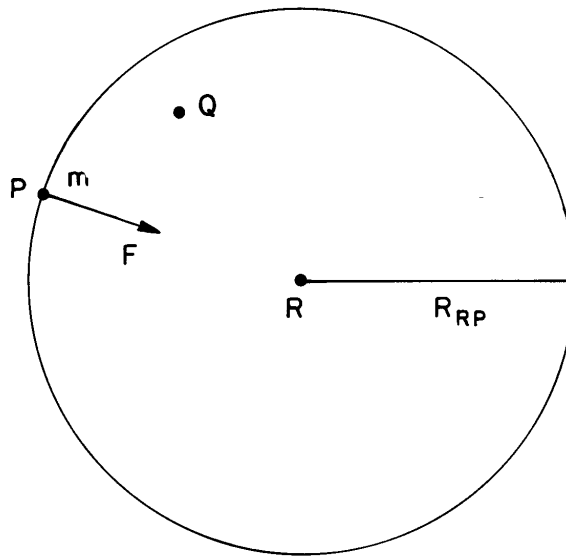



Figura 4.3: Força sobre m calculada a partir de R.

Para calcular a força resultante dividimos o universo em duas partes centradas em Q. A primeira parte é uma esfera de raio R_{QP} centrada em Q e passando por P. A massa desta esfera é $M = \rho 4\pi R_{QP}^3/3$. Ela atrai a massa m com uma força dada por $GMm/R_{QP}^2 = 4\pi G\rho m R_{QP}/3$ apontando de P para Q. A segunda parte é o restante do universo. Este restante é composto de uma série de cascas esféricas externas centradas em Q contendo a partícula teste interna m. Pela Eq. (1.6) esta segunda parte não exerce força em m. Isto significa que a força resultante sobre m exercida por todo o universo calculando desta maneira é proporcional à distância R_{QP} e apontando de P para Q.

Seguindo um procedimento similar mas usando um sistema de coordenadas centrado em outro ponto R, Figura 4.3, obteríamos que a força resultante exercida por todo o universo sobre m seria proporcional à distância entre P e R, apontando de P para R: $F = 4\pi G\rho m R_{RP}/3$.

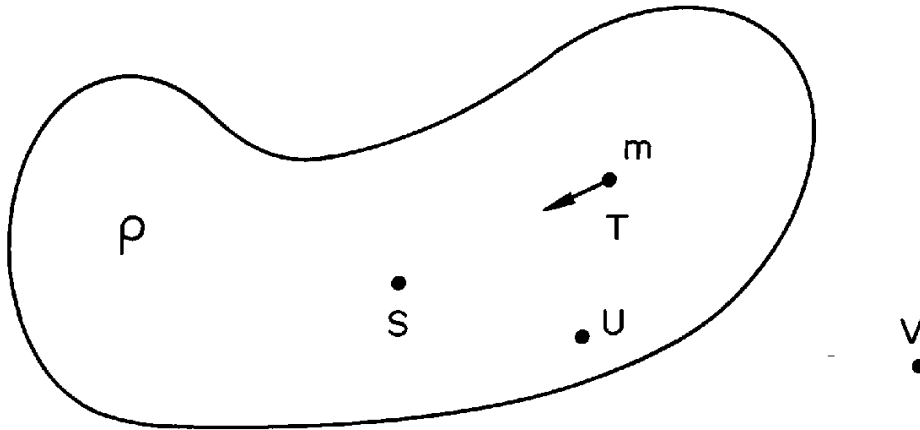



Figura 4.4: Corpo finito atraindo uma de suas partículas.

Isto significa que dependendo de como fazemos os cálculos obtemos um resultado diferente. Certamente isto não é satisfatório. Contudo, o problema não está com a matemática. Por exemplo, se calculamos a força exercida por uma distribuição finita de matéria sobre uma partícula teste m utilizando a lei de Newton da gravitação,

o resultado é sempre o mesmo não importando como calculamos esta força ou onde centramos o sistema de coordenadas. Por exemplo, suponhamos o corpo curvo de volume finito e densidade constante ρ representado na Figura 4.4. Ele está cercado por um espaço vazio infinito. Se calculamos a força gravitacional resultante exercida por este corpo sobre uma de suas partículas de massa m (ou ρdV, sendo dV seu volume infinitesimal) localizada em T, obtemos sempre o mesmo resultado apontando de T para S. Ou seja, podemos fazer as contas colocando o sistema de coordenadas centrado em S, em T, em U, em V ou em qualquer outro ponto que o resultado vai ser sempre uma força de mesma grandeza apontando de T para S.

Uma outra maneira de apresentar o paradoxo é considerar a força sobre m_g localizado em P calculada a partir de uma origem Q, Figura 4.2. Como já vimos, a força resultante sobre m_g aponta de P para Q e é proporcional à distância PQ. Isto significa que a força resultante sobre uma partícula material localizada em P torna-se infinita se ela está localizada a uma distância infinita de Q.

Este é o chamado paradoxo gravitacional. Ele foi descoberto por Seeliger e Carl Neumann no final do século passado (1894-1896). Embora o tenhamos apresentado aqui utilizando uma distribuição contínua de matéria em um universo homogêneo e perfeitamente uniforme, não acreditamos que o paradoxo seria evitado considerando massas localizadas em pontos materiais distribuídos uniformemente no espaço, ao invés de espalhadas uniformemente por todo o lado de maneira contínua. Também não acreditamos que o paradoxo seria evitado levando em conta as anisotropias locais de matéria observadas no mundo.

4.3 O Paradoxo Baseado no Potencial

Ao invés de calcular a força, poderíamos também calcular o potencial gravitacional ou a energia potencial gravitacional.

O potencial gravitacional em um ponto $\vec{r}_o$ devido a N massas gravitacionais m_{gj} localizadas em $\vec{r}_j$ é dado por:

$$\Phi(\vec{r}_o) = -\sum_{j=1}^{N} G\frac{m_{gj}}{r_{oj}} \ ,$$

onde $r_{oj} \equiv |\vec{r}_o - \vec{r}_j|$. A energia gravitacional de uma partícula material m_{go} localizada em $\vec{r}_o$ interagindo com estas N massas é dada por $U = m_{go}\Phi$.

Calculamos agora o potencial gravitacional num ponto $\vec{r}_o = r_o\hat{z}$ devido a uma distribuição esfericamente simétrica de matéria de raio $R > r_o$, espessura dR e massa $dM_g = 4\pi R^2 dR\rho_g$ (ρ_g sendo a densidade volumétrica de matéria da casca) com a expressão anterior. Substituindo a somatória por uma integral de superfície sobre toda a casca e substituindo m_{gj} por $d^3M_g = \rho_g R^2 dR d\varphi \sin\theta d\theta$ leva ao resultado bem conhecido dado por:

$$d\Phi(r_o < R) = -G\rho_g R^2 dR \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{R^2 + r_o^2 - 2Rr_o\cos\theta}}$$

$$= -\frac{GdM_g}{R} = -4\pi G\rho_g R dR \ .$$

Isto é, a contribuição da casca é proporcional ao seu raio. Isto significa que se integrarmos esta expressão de $R = 0$ (ou a partir de $R = r_o$) até o infinito obteremos um resultado infinito. Isto foi obtido por Seeliger e Neumann. O mesmo pode ser dito da energia gravitacional de uma partícula pontual interagindo com este universo homogêneo infinito, isto é, ela também diverge para infinito. A força sobre a partícula teste pode ser obtida como menos o gradiente desta energia potencial, mas neste caso isto gera uma indefinição.

Há uma outra maneira de apresentar o paradoxo. A equação satisfeita pelo potencial gravitacional na presença da matéria é conhecida como a equação de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_g \ .$$

Podemos obter esta equação observando que $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\vec{r})$, onde $\delta(\vec{r})$ é a função delta de Dirac, que $\Phi = -Gm_g/r$ e que $m_g\delta(\vec{r}) = \rho_g(\vec{r})$.

Se temos um universo homogêneo com uma densidade de massa constante esperaríamos obter um potencial Φ constante. Mas supondo que Φ é constante e usando a equação de Poisson resulta que $\rho_g = 0$. Só que isto é contrário à suposição inicial de uma densidade constante e finita diferente de zero. Isto é, não há uma solução da equação de Poisson tal que tanto Φ quanto ρ_g sejam constantes finitas não nulas.

4.4 Soluções do Paradoxo

Há três maneiras principais de resolver o paradoxo: (I) O universo tem uma quantidade finita de matéria. (II) A lei de Newton da gravitação deve ser modificada. (III) Há dois tipos de massa no universo, positiva e negativa.

(I) Na primeira solução mantemos a lei de Newton da gravitação e também os constituintes do universo como usualmente conhecidos. Apenas exigimos uma quantidade finita de matéria no universo para com isto evitar o paradoxo. Por exemplo, se o universo tem uma massa total finita M distribuída uniformemente ao redor de um centro P de raio R, com uma densidade de massa constante $\rho = M/(4\pi R^3/3)$, a força gravitacional resultante exercida sobre uma partícula teste m localizada em $r < R$ é dada simplesmente por $Gm(4\rho\pi r^3/3)/r^2 = 4\pi G\rho mr/3$ apontando de m para P, não interessando como fazemos os cálculos. Podemos colocar o sistema de coordenadas centrado em P, ou em m ou em qualquer outro ponto que o resultado final dos cálculos será sempre o mesmo.

Contudo, esta solução gera outros problemas. Como já vimos, Newton abandonou este modelo cosmológico do universo porque ele leva a uma situação de colapso. Isto é, a matéria externa tende a se concentrar no centro devido à atração gravitacional da matéria interna. Para evitar este problema precisaríamos supor que o universo está girando em relação ao espaço absoluto (o sistema planetário não colapsa ao centro do Sol devido a sua rotação, de tal forma que a força centrípeta exercida pelo Sol é equilibrada por $m_i\vec{a}$, ou por uma força centrífuga no sistema de referência que gira com os planetas). Mas já vimos anteriormente que o universo como um todo não gira

em relação ao espaço absoluto (o melhor sistema inercial que temos é aquele no qual as galáxias distantes são vistas sem rotação como um todo). Isto significa que esta solução proposta é refutada pelas observações. Teríamos então de postular algum tipo de força repulsiva desconhecida até o momento para evitar este colapso gravitacional de um universo com uma quantidade finita de matéria.

(II) A segunda solução foi proposta por Seeliger e C. Neumann em 1895-1896. Eles propuseram independentemente que o potencial gravitacional $\Phi = -Gm/r$ deve ser substituído por $-Gme^{-\alpha r}/r$, onde α tem dimensões do inverso de comprimento e fornece o intervalo típico de interação, isto é, a ordem de grandeza de até onde a gravitação é realmente efetiva. Deve ser enfatizado que Seeliger e Neumann propuseram este potencial 50 anos antes de Yukawa sugerir uma lei similar descrevendo as interações nucleares. Se temos dois corpos interagindo, m_{g1} e m_{g2} separados por uma distância r_{12} a energia potencial gravitacional entre eles seria dada por

$$U = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}}e^{-\alpha r_{12}} \ .$$

Daqui para a frente apresentamos nossos próprios cálculos. Utilizando que $\vec{F} = -\nabla U$ podemos obter a força exercida por m_{g2} sobre m_{g1}, supondo α ser uma constante:

$$\vec{F} = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}(1 + \alpha r_{12})e^{-\alpha r_{12}} \ . \tag{4.1}$$

Integramos agora esta equação supondo um universo com densidade de matéria constante ρ_2. A partícula teste de massa gravitacional m_{g1} está localizada sobre o eixo z a uma distância d_1 da origem do sistema de coordenadas em O, $\vec{r}_1 = d_1\hat{z}$. Consideramos um elemento de massa dm_{g2} localizado em $\vec{r}_2 = r_2\hat{r}_2$. Mais uma vez dividimos o universo em duas partes centradas em O: A primeira parte está localizada em $r_2 > d_1$ enquanto que a segunda parte está localizada em $r_2 < d_1$, Figura 4.5.

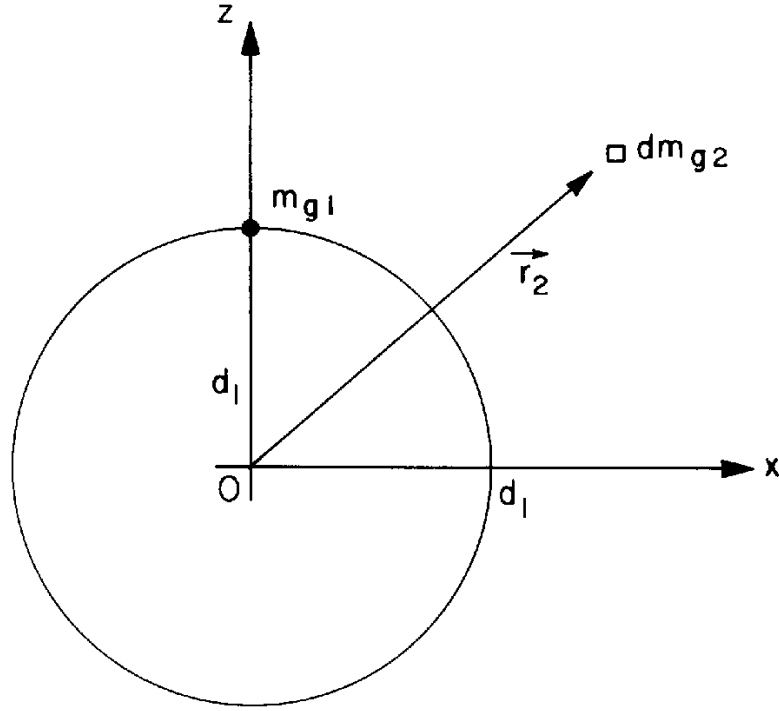



Figura 4.5: Sistema de coordenadas.

Integramos agora a força gravitacional exercida por uma casca esférica de raio r_2 sobre m_{g1} utilizando coordenadas esféricas com φ_2 indo de zero a 2π e θ_2 indo de zero a π. Com $r_2 > d_1$ obtemos:

$$d\vec{F} = \frac{2\pi G m_{g1} \rho_2 r_2 e^{-\alpha r_2} dr_2 \hat{z}}{d_1^2 \alpha} \left[(1 + \alpha d_1) e^{-\alpha d_1} - (1 - \alpha d_1) e^{\alpha d_1} \right] .$$

Isto é diferente de zero se $d_1 \neq 0$. Isto é, uma casca esférica vai exercer uma força resultante sobre uma partícula teste interna de acordo com o potencial de Seeliger-Neumann se ela não está no centro da casca. Há uma diferença marcante entre este resultado e o newtoniano. Este último não prevê nenhuma força qualquer que seja a posição da partícula interna.

No limite em que $\alpha d_1 \ll 1$ obtemos o resultado newtoniano de força nula.

Integrando este resultado de $r_2 = d_1$ até o infinito obtemos:

$$\vec{F} = -\frac{2\pi G m_{g1}\rho_2(1+\alpha d_1)\hat{z}}{d_1^2\alpha^3}\left[(1-\alpha d_1)-(1+\alpha d_1)e^{-2\alpha d_1}\right] . \quad (4.2)$$

Este resultado é válido para $\alpha \neq 0$ e não pode ser aplicado para $\alpha = 0$.

Calculamos agora a força sobre m_{g1} devido à segunda parte localizada em $r_2 < d_1$. Primeiro calculamos a força com que uma casca esférica atrai uma partícula externa. Integrando a Eq. (4.1) em φ_2 indo de zero a 2π e em θ_2 indo de zero a π resulta que, com $r_2 < d_1$:

$$d\vec{F} = \frac{2\pi G m_{g1}\rho_2(1+\alpha d_1)e^{-\alpha d_1}r_2 dr_2\hat{z}}{d_1^2\alpha}\left(e^{-\alpha r_2}-e^{\alpha r_2}\right) .$$

No limite em que $\alpha r_2 \ll 1$ e $\alpha d_1 \ll 1$ obtemos o resultado newtoniano de que uma casca esférica atrai uma partícula externa como se toda a casca estivesse concentrada em seu centro, ou seja:

$$d\vec{F} = -\frac{4\pi r_2^2 dr_2\rho_2 G m_{g1}\hat{z}}{d_1^2} .$$

Integrando o resultado anterior em r_2 indo de zero a d_1 resulta em:

$$\vec{F} = \frac{2\pi G m_{g1}\rho_2(1+\alpha d_1)\hat{z}}{d_1^2\alpha^3}\left[(1-\alpha d_1)-(1+\alpha d_1)e^{-2\alpha d_1}\right] . \quad (4.3)$$

Adicionando as Eqs. (4.2) e (4.3) obtemos uma força resultante nula agindo sobre m_{g1} devido a todo o universo. O mesmo resultado é obtido escolhendo qualquer outro ponto como origem do sistema de coordenadas. Isto mostra que o paradoxo é resolvido com a energia potencial de Seeliger-Neumann, mesmo mantendo um universo homogêneo e infinito.

Analisamos agora esta solução do paradoxo no que diz respeito ao potencial. A equação satisfeita pelo potencial (quando o potencial

devido a uma massa pontual m_g é dado por $\Phi = -Gm_g e^{-\alpha r}/r$) é dada por:

$$\nabla^2\Phi - \alpha^2\Phi = 4\pi G\rho_g \ .$$

Há agora uma solução para esta equação com uma densidade finita e constante ρ_g gerando um potencial finito e constante $\Phi = -4\pi G\rho_g/\alpha^2$. Com os valores conhecidos de G, ρ_g e utilizando $\alpha = H_o/c$ (H_o é a constante de Hubble) isto resulta num potencial gravitacional próximo de $-c^2$.

Uma outra maneira de obter este resultado é integrando diretamente o potencial devido a uma casca esférica de raio r. Para este fim substituímos m_g por $d^3m_g = \rho \sin\theta d\theta r^2 dr d\varphi$ e calculamos o potencial na origem. Integrando:

$$\Phi = -G\rho_g \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi)\frac{e^{-\alpha r}}{r} = -\frac{4\pi G\rho_g}{\alpha^2} \ .$$

O mesmo resultado é obtido calculando o potencial em qualquer outro ponto $\vec{r}_o$ diferente da origem.

Tudo isto mostra a solução do paradoxo gravitacional baseado no potencial.

(III) A terceira maneira de resolver o paradoxo gravitacional é supondo a existência de massas gravitacionais negativas. O primeiro a propor esta idéia de uma massa gravitacional negativa parece ter sido Föppl em 1897, [Mac60], pág. 234. Ele propôs isto baseado em analogias eletromagnéticas e não estava preocupado com o paradoxo gravitacional. Chamando a massa usual de positiva, teríamos a seguinte regra: massa positiva atrai massa positiva mas repele massa negativa, enquanto que massa negativa atrai massa negativa e repele massa positiva. Isto é exatamente o oposto ou o simétrico do que acontece com as cargas elétricas. Sendo a natureza desta forma, poderíamos ter um universo com uma quantidade igual de massas positiva e negativa, no qual a lei de Newton da gravitação seria obedecida e no qual o paradoxo gravitacional não apareceria mesmo com uma quantidade infinita de massa positiva distribuída uniformemente num universo infinito. Agora há uma solução das equações na qual ambas as massas estão igualmente distribuídas por todos os lados de tal forma que a força gravitacional resultante sobre qualquer corpo é

nula na média. Há também uma solução da equação de Poisson com um potencial Φ constante e com uma densidade líquida de massa gravitacional média nula, $\rho_g = 0$.

Podemos entender esta terceira solução mais facilmente observando que não há um paradoxo elétrico análogo ao gravitacional. O motivo para isto é que usualmente consideramos o universo como um todo como sendo eletricamente neutro. Isto é, deixando de lado as anisotropias locais, a carga negativa em uma região é compensada por uma carga positiva correspondente em algum outro lugar. Isto significa que na média não há força eletrostática sobre qualquer carga devido a todas as cargas no universo. O mesmo aconteceria com a gravitação desde que exista uma massa gravitacional negativa com a mesma quantidade que a positiva.

É muito fácil ver como surge o paradoxo gravitacional. De qualquer forma é impressionante que com um modelo ou situação tão simples sejamos capazes de chegar a uma conclusão tão forte, a saber: Não podemos ter um universo com uma quantidade infinita de matéria comum no qual a lei de Newton da gravitação é obedecida. Ao menos uma destas componentes tem de ser modificada: A quantidade infinita de matéria no universo, a lei de Newton da gravitação, ou a natureza dos constituintes do cosmos (se temos ou não massa negativa).

Nosso modelo cosmológico preferido é aquele de um universo infinito e sem fronteiras no espaço, que sempre existiu sem nunca ter sido criado e com uma quantidade infinita de matéria em todas as direções. Isto é, um universo se estendendo em todas as direções sem limites, com uma quantidade infinita de matéria total, embora com uma densidade de matéria finita na média. O modelo mais simples deste universo é este com uma distribuição homogênea de matéria em grande escala, de tal forma que qualquer ponto possa ser escolhido arbitrariamente como seu centro. Poderíamos também realizar os cálculos começando de qualquer ponto. Por este motivo não adotamos a primeira solução do paradoxo gravitacional apresentada acima. Preferimos a segunda e terceira soluções. Neste livro exploramos quantitativamente apenas a segunda solução.

4.5 Absorção da Gravidade

Há outros motivos que fizeram com que várias pessoas propusessem um decaimento exponencial no potencial gravitacional de um ponto material, na energia potencial gravitacional entre duas massas pontuais, ou na força gravitacional. Estas idéias não estão relacionadas diretamente com o paradoxo gravitacional mas algumas vezes a modificação proposta é ao longo das mesmas linhas. Fizemos uma análise detalhada destes motivos, indicando as principais referências em: [Ass92f], [Ass93c] e [Ass94, Seções 7.5 a 7.7]. Ver ainda [Mar86].

A luz fluindo de uma fonte é absorvida pelo meio onde se propaga, de tal forma que sua potência cai como $e^{-\lambda r}/r^2$. As pessoas que supõem que a gravitação se propaga (através de ondas gravitacionais, de grávitons, ou de qualquer outra coisa) a partir de uma fonte de forma similar ao que acontece com a luz, foram levadas por analogia a propor um decaimento exponencial na gravitação.

Quando colocamos um meio dielétrico entre duas cargas pontuais, este meio é afetado por estas cargas e se polariza. Um dos efeitos desta polarização do dielétrico é modificar a força resultante atuando em cada uma das cargas, quando comparada com a situação na qual não havia nenhum meio dielétrico entre elas. Neste caso não precisamos falar de uma propagação da força elétrica e a situação pode ser descrita por uma interação simultânea e a distância entre muitos corpos. Apesar deste fato, se assumirmos uma analogia entre eletromagnetismo e a gravitação podemos suspeitar de alguma influência do meio entre dois corpos em relação à força gravitacional resultante em qualquer um deles. Ou seja, novamente podemos ser levados a um decaimento exponencial, embora neste caso não haja nada se propagando. A única coisa que acontece aqui é que uma interação a distância entre muitos corpos vai ter este comportamento.

Observações astronômicas como as curvas de rotação planas das galáxias espirais também fizeram com que vários autores propusessem modificações na lei de gravitação de Newton, ao invés de postular matéria escura. Este assunto está bem tratado com diversas discussões detalhadas em [RFT82] e [Rub83]. Toda esta problemática da curva de rotação plana das galáxias pode ser entendida de maneira

simples. Vamos supor uma interação gravitacional entre um grande corpo de massa M e um pequeno corpo de massa $m \ll M$ descrevendo uma órbita circular ao redor de M (estamos supondo um referencial inercial). Utilizando a lei de Newton da gravitação universal, sua segunda lei de movimento e a expressão da aceleração centrípeta vem: $GMm/r^2 = ma = mv^2/r = m\omega^2 r$. Aqui r é a distância entre eles, v é o módulo da velocidade tangencial de m, a é o módulo de sua aceleração centrípeta e $\omega = v/r$ é sua velocidade angular ao redor de M. Desta expressão vem que $v = \sqrt{GM/r}$ ou que $\omega = \sqrt{GM/r^3}$. Ou seja, quanto maior for a distância entre m e M, menor vai ser a velocidade de m. Esta previsão é perfeitamente corroborada no caso do sistema planetário, sendo M o Sol e m qualquer um dos planetas do sistema solar (estas relações de v e de ω em função de r são outras maneiras de se falar das leis de Kepler). Por outro lado o mesmo já não acontece com as galáxias. Isto é, seja m uma estrela pertencente a uma galáxia mas distante de seu núcleo, e M a massa do núcleo desta galáxia (determinada a partir da matéria visível ou incandescente da galáxia). A mesma relação deveria ser obtida aqui, mas as observações indicam que em praticamente todas as galáxias a velocidade tangencial v das estrelas afastadas fica aproximadamente constante a medida em que r aumenta, ao invés de cair com $1/\sqrt{r}$ como seria de se esperar com a mecânica newtoniana. Para resolver este problema há duas tentativas principais. Uma é supor que existe uma matéria escura (ainda não observada) que poderia interagir gravitacionalmente com as estrelas. A partir das curvas de rotação planas observadas pode-se estimar a distribuição desta matéria escura em relação ao centro da galáxia, supondo a validade das leis de Newton. Uma outra tentativa é supor que praticamente toda a matéria existente é aquela já detectada (afinal de contas a matéria escura ainda não foi detectada observacionalmente em nenhum intervalo de freqüências) e então para explicar as curvas de rotação planas observadas tem-se de supor alguma modificação na mecânica newtoniana para distâncias da ordem de 10^{20} m, que é o tamanho típico de uma galáxia. Pode-se tentar alterar tanto a lei do movimento $m_i a$ quanto a força gravitacional newtoniana GmM/r^2. Neste último caso algumas tentativas que foram feitas com relativo sucesso envolveram um de-

caimento exponencial na gravitação, [San84], [San86] e [San90]. Um modelo alternativo é bem desenvolvido em [Soa92] e [Soa94].

Já foram feitas experiências tentando detectar a existência de modificações na lei de gravitação de Newton. Alguns deles encontraram resultados positivos, como aqueles de Majorana, e por este motivo deveriam ser repetidos.

Já discutimos estes assuntos nas referências listadas acima e por este motivo não vamos entrar em detalhes aqui. O que deve ser enfatizado é que a lei de Newton da gravitação ou qualquer outra expressão pode ser aproximadamente válida em algumas condições embora possa ser necessário modificá-la devido às observações astronômicas ou às experiências de laboratório. É importante manter a mente aberta em relação a isto.

Capítulo 5

Leibniz e Berkeley

Antes de apresentar as críticas que E. Mach fez à mecânica newtoniana, discutimos os pontos de vista de G. W. Leibniz e do bispo G. Berkeley sobre o movimento absoluto e relativo. Estes filósofos anteciparam muitos pontos de vista que depois foram defendidos por Mach.

5.1 Leibniz e o Movimento Relativo

Leibniz (1646-1716) foi introduzido à ciência moderna de seu tempo por C. Huygens. Eles estiveram em grande contato durante a estadia de Leibniz em Paris, no período entre 1672 e 1676. Huygens pode ter influenciado a Leibniz sobre suas concepções de tempo, espaço e sobre o significado da força centrífuga, termo cunhado por Huygens. Para um estudo detalhado das reações de Huygens à gravitação newtoniana e sobre seus pontos de vista em relação ao movimento absoluto, ver [Jam69, págs. 119-126], [Mar89] e [Mar93].

Leibniz nunca aceitou os conceitos newtonianos de espaço e tempo absolutos. Ao invés disto, ele mantinha que o espaço e o tempo dependem das coisas materiais, sendo o espaço a ordem dos fenômenos coexistentes e o tempo a ordem dos fenômenos sucessivos. Há uma correspondência muito interessante entre Leibniz e S. Clarke (1675-1729), um discípulo de Newton, que transcorreu durante os anos de 1715 e 1716. Leibniz escreveu em francês e Clarke em inglês. Esta correspondência esclarece vários pontos importantes deste assunto. Em inglês ela pode ser encontrada em [Ale84] e a tradução para o português se encontra em [Lei83], de onde tiramos as citações. Uma discussão detalhada encontra-se em [Ale84] e em [Koy86, Cap. 11]. No quarto parágrafo de sua terceira carta para Clarke, Leibniz afirma:

> 4. Quanto a mim, deixei assentado mais de uma vez que, a meu ver, o espaço é algo puramente relativo, como o

> tempo; a saber, na ordem das coexistências, como o tempo na ordem das sucessões. De fato, o espaço assinala em termos de possibilidade uma ordem das coisas que existem ao mesmo tempo, enquanto existem junto, sem entrar em seu modo de existir. E quando se vêem muitas coisas junto, percebe-se essa ordem das coisas entre si.

Leibniz defende a idéia de que todo movimento é relativo. Apesar deste fato ele admite que pode ser mais prático ou conveniente dizer que algum corpo muito grande como a Terra está em repouso enquanto um corpo pequeno se move em relação a ela, do dizer o contrário. Também pode ser mais prático ou mais conveniente dizer que os planetas se movem em relação as estrelas fixas, do que dizer o oposto. Mas isto é mais uma questão de convenção do que de realidade física. Por exemplo, num texto escrito em 1689 intitulado *Sobre o copernicanismo e a relatividade do movimento* ele disse, [Lei89], págs. 90-92:

> Como já provamos por considerações geométricas a equivalência de todas as hipóteses com respeito aos movimentos de quaisquer corpos que sejam, não importando quão numerosos, movidos apenas por colisões com outros corpos, segue-se que nem mesmo um anjo pode determinar com rigor matemático qual dentre os muitos corpos deste tipo está em repouso e qual [corpo] é o centro do movimento dos outros. E se os corpos estão se movendo livremente ou colidindo uns com os outros, é uma lei notável da natureza que nenhum olho, qualquer que seja o lugar da matéria em que ele esteja colocado, tem um critério seguro para dizer a partir dos fenômenos onde há movimento, quanto movimento existe, *ou se ele move este mesmo olho ele mesmo.* [cf. Seneca, *Naturales Quaestiones* VII. 2.] Resumindo meu ponto de vista, como o espaço sem matéria é algo imaginário, o movimento, com todo o rigor matemático, não é nada além de uma mudança nas posições [*situs*] dos corpos uns em relação aos outros e, assim, o movimento não é algo absoluto, mas consiste em uma relação. (...)

> Mas como, contudo, as pessoas atribuem movimento e repouso aos corpos, mesmo para corpos que elas acreditam não ser movidos nem por uma mente [*intelligentia*], nem por um impulso interno [*instinctus*], temos de examinar o sentido no qual elas fazem isto, de tal forma que não julguemos que elas tenham falado falsamente. E neste assunto temos de responder que devemos escolher a hipótese mais inteligível e que a verdade de uma hipótese não é nada além de sua inteligibilidade. Agora, de um ponto de vista diferente, não com respeito às pessoas e suas opiniões, mas com respeito às próprias coisas com que devemos tratar, uma hipótese pode ser mais inteligível do que uma outra e mais apropriada para um dado propósito. E assim, a partir de pontos de vista diferentes, uma pode ser verdadeira e outra falsa. Logo, para uma hipótese ser verdadeira basta que ela seja usada apropriadamente. Assim, embora um pintor possa representar o mesmo palácio através de desenhos em diferentes perspectivas, julgaríamos que ele fez a escolha errada se ele apresentar aquele [desenho] que cobre ou esconde partes que são importantes saber pelo assunto em questão. Da mesma forma, um astrônomo não comete um erro maior ao explicar a teoria dos planetas de acordo com a hipótese tychonica do que ele cometeria ao usar a hipótese copernicana para ensinar a astronomia esférica e para explicar o dia e a noite, sobrecarregando desta maneira o estudante com dificuldades desnecessárias. E o astrônomo observacional [*Historicus*] que insiste em que a Terra se move, ao invés do Sol, ou que a Terra ao invés do Sol está no signo de Áries, falaria inapropriadamente, embora ele siga o sistema copernicano; nem teria Josué falado menos falsamente (isto é, menos absurdamente) se ele tivesse dito "Terra, detém-te."

Isto é, o sistema astronômico geocêntrico híbrido de Tycho Brahe pode ser "mais apropriado para um dado propósito" do que o sistema heliocêntrico de Copérnico, enquanto que o sistema de Copérnico

pode ser mais apropriado para um outro fim do que o de Tycho Brahe. Leibniz continua o texto afirmando que o sistema geocêntrico ptolomaico é o mais verdadeiro na astronomia esférica (isto é, mais inteligível), enquanto que a explicação copernicana é a teoria mais verdadeira (isto é, mais inteligível) ao explicar a teoria dos planetas.

Ele expressou o mesmo ponto de vista em seu trabalho de 1695 intitulado *Um Exemplar de Dinâmica* [Specimen Dynamicum]. Na passagem seguinte do manuscrito original, que foi suprimida antes da publicação, ele disse ([Lei89], pág. 125):

> Também compreendi a natureza do movimento. Além do mais, também percebi que o espaço não é algo absoluto ou real e que ele nem sofre mudança nem podemos conceber o movimento absoluto, mas que toda a natureza do movimento é relativa, de tal forma que dos fenômenos não podemos determinar com rigor matemático o que está em repouso, ou com que quantidade de movimento algum corpo se move. Isto vale mesmo para o movimento circular, embora não parecesse assim para Isaac Newton, aquele cavalheiro distinto que é, talvez, a maior jóia que a Inglaterra culta jamais teve. Embora ele tenha dito muitas coisas esplêndidas sobre o movimento, ele pensou que, com a ajuda do movimento circular, podia discernir qual matéria contém movimento a partir da força centrífuga, coisa com a qual não posso concordar. Mas mesmo se não houver maneira matemática de determinar a hipótese verdadeira, contudo podemos, com boas razões, atribuir movimento verdadeiro à matéria com a qual resultaria a hipótese mais simples para explicar os fenômenos. Em relação ao restante, basta para nós por questões práticas investigar não tanto o sujeito do movimento quanto as mudanças relativas das coisas, umas em relação às outras, já que não há ponto fixo no universo.

Na segunda parte deste trabalho ele disse, ver [Lei89], págs. 130-131:

Temos de perceber, acima de tudo, que força é algo absolutamente real nas substâncias, mesmos nas substâncias criadas, enquanto que espaço,tempo e movimento são, até um certo ponto, seres da razão [do intelecto] e que são verdadeiros ou reais, não por si mesmos [*per se*], mas apenas até o ponto que eles envolvem ou atributos divinos (imensidão, eternidade, a habilidade de realizar trabalho), ou a força nas substâncias criadas. Disto segue imediatamente que não há lugar vazio e [não há] momento de tempo vazio. Além do mais, segue que movimento considerado separadamente da força, isto é, o movimento considerado até o ponto em que contém apenas noções geométricas (tamanho, forma e suas mudanças), não é realmente nada além da mudança de situação e, além disto, *no que diz respeito aos fenômenos, movimento é uma relação pura*, algo que Descartes também reconheceu ao definir o movimento como uma translação das vizinhanças de um corpo para as vizinhanças de outro. Mas ao tirar conseqüências disto, ele esqueceu sua definição e estabeleceu as leis do movimento como se o movimento fosse algo real e absoluto. Portanto, temos de considerar que quaisquer que sejam as maneiras como muitos corpos possam estar em movimento, não podemos inferir a partir dos fenômenos quais deles têm realmente movimento absoluto e determinado, ou [estão em] repouso. Ao invés disto, podemos atribuir o repouso a qualquer um deles que escolhermos e ainda assim resultarão os mesmos fenômenos. (...) E na verdade, isto é exatamente o que experienciamos, pois sentiríamos a mesma dor se batemos nossa mão contra uma pedra em repouso, suspensa, se quiser, por um fio, ou se a pedra batesse contra nossa mão em repouso com a mesma velocidade. Contudo, falamos como requer a situação, de acordo com a explicação mais apropriada e mais simples dos fenômenos. É exatamente neste sentido que usamos a noção do *primum mobile* na astronomia esférica, enquanto que no estudo teórico dos planetas temos de usar

> a hipótese copernicana. Como uma conseqüência imediata deste ponto de vista, aquelas disputas realizadas com tanto entusiasmo, disputas nas quais mesmo os teólogos estiveram envolvidos, desaparecem completamente. Embora força seja algo real e absoluto, o movimento pertence aos fenômenos e às relações e temos de procurar a verdade não tanto nos fenômenos quanto em suas causas.

Veremos depois que também Mach defendeu a idéia de que os sistemas copernicano e ptolomaico são igualmente válidos e corretos. A única diferença é que o sistema copernicano seria mais econômico ou prático.

Mas que explicações Leibniz oferece para as experiências chaves de Newton, do balde girante e dos dois globos?

Numa carta escrita a Huygens em 1694 ele disse, [Lei89], pág. 308:

> Quanto à diferença entre movimento absoluto e relativo, creio que se o movimento, ou melhor a força motriz nos corpos, é algo real, como parece que temos de reconhecer, ela precisaria de ter um *sujeito* [*subjectum*]. Pois, se a e b se aproximam, afirmo que todos os fenômenos seriam os mesmos, não interessando qual deles se assume em movimento ou em repouso; e se houvessem 1.000 corpos, concordo que os fenômenos não podem nos fornecer (nem mesmo aos anjos) motivos [*raison*] infalíveis para determinar o sujeito do movimento ou seu grau [sua quantidade] e que cada corpo pode ser concebido separadamente como estando em repouso. Creio que isto é tudo que você perguntou. Mas você não negaria (creio) que é verdade que cada um deles tem uma certa quantidade de movimento, ou, se preferir, uma certa quantidade de força, apesar da equivalência das hipóteses. É verdade que derivo disto a conseqüência de que há alguma coisa a mais na natureza do que aquilo que é determinado pela geometria. E isto não está entre os menos importantes dentre os diversos motivos que uso para provar que, além da extensão e

> de suas variações, que são coisas puramente geométricas, temos de reconhecer alguma coisa maior, a saber, força. Newton reconheceu a equivalência das hipóteses no caso de movimento retilíneo; mas ele acredita que, em relação aos movimentos circulares, o esforço exercido pelos corpos que circulam para mover-se para fora do centro ou do eixo de circulação nos permite reconhecer seus movimentos absolutos. Mas tenho motivos que me levam a crer que não há exceções para a lei geral de equivalência. Parece-me, contudo, que uma vez você foi da mesma opinião de Newton no que diz respeito ao movimento circular.

Ao mesmo tempo em que defende uma teoria relacional de espaço e tempo, Leibniz parece dar algum valor absoluto ou real para a força ou para a energia cinética. Isto é de certa forma contraditório. Ele também não explicitou claramente quais eram suas razões para acreditar que não há exceções para a lei geral de equivalência (para a teoria relacional).

Isto é o que ele afirma nos parágrafos 52 e 53 de sua quinta carta a Clarke, [Lei83]:

> 52. Para provar que o espaço, sem os corpos, é uma realidade absoluta, tinham-me objetado que o universo material finito poderia andar no espaço. Respondi que não parece razoável que o universo material seja finito, e, ainda que o supuséssemos, seria irracional que fosse dotado de movimento, o que não se dá na hipótese de mudarem suas partes de situação entre si, porque o primeiro, o movimento, não produziria nenhuma mudança observável, e seria sem finalidade. Outra coisa é quando as suas partes mudam de situação entre si, porque então se reconhece um movimento no espaço, mas consistindo na ordem das relações, que mudaram. Replica-se, agora, que a verdade do movimento é independente da observação, e que um navio pode andar sem que aquele que está dentro perceba. Respondo que o movimento é independente da observação, mas não da observabilidade. Não há movimento, quando não existe mudança observável. E mesmo

> quando não há mudança observável, não há mudança de modo algum. O contrário funda-se na suposição de um espaço real absoluto, que refutei demonstrativamente pelo princípio da necessidade de uma razão suficiente das coisas.
>
> 53. Não encontro nada na oitava definição dos *Princípios Matemáticos da Natureza* [*Principia*], nem no escólio dessa definição, que prove que se possa demonstrar a realidade do espaço em si. Contudo, concedo que há diferença entre um verdadeiro movimento absoluto de um corpo, e uma simples mudança relativa da situação relativamente a um outro corpo. Com efeito, quando a causa imediata da mudança está no corpo, este está verdadeiramente em movimento, e nesse caso a situação dos outros, com relação a ele, estará, por conseqüência, mudada, ainda que a causa desta mudança não resida neles. É verdade que, falando com exatidão, não há corpo que esteja perfeita e inteiramente em repouso; mas é disso que se faz abstração ao considerar a coisa matematicamente. Assim não deixei nada sem resposta, de tudo quanto alegaram a favor da realidade absoluta do espaço. E demonstrei a falsidade dessa realidade, por um princípio fundamental dos mais razoáveis e mais provados, contra o qual não se poderia achar nenhuma exceção ou reparo. De resto, pode-se ver, por tudo o que acabo de dizer, que não devo admitir um universo móvel, nem lugar algum fora do universo material.

Concordamos com H. G. Alexander quando afirmou ao analisar esta parte da carta que "não há dúvida, contudo, que esta admissão da distinção entre movimento absoluto e relativo é inconsistente com sua [de Leibniz] teoria geral do espaço," [Ale84], pág. xxvii. Isto é, Lebniz se deixou levar pelos argumentos de Newton relacionados com as experiências do balde e dos dois globos. Tacitamente Leibniz está admitindo que de fato existe o movimento absoluto, contrariamente às suas crenças. Uma maneira de sair desta contradição seria manter que estes efeitos (a forma côncava da superfície da água ou a tensão

na corda no caso dos dois globos) são devidos a uma rotação *relativa* entre a água e os dois globos em relação à Terra e as estrelas fixas. Ou seja, poderia dizer que estes efeitos surgem não apenas quando a água e os globos giram em relação as estrelas, mas que eles também surgiriam quando a água e os globos estivessem em repouso (em relação ao observador ou em relação à Terra) e as estrelas estivessem girando ao contrário em relação a eles, com a mesma velocidade angular. Se Leibniz tivesse visto claramente esta possibilidade, poderia ter sustentado que mesmo estas experiências não provam a existência do espaço ou movimento absolutos. Também poderia sustentar que a água não precisa estar verdadeiramente ou absolutamente em movimento giratório quando sua superfície está côncava, já que se poderia igualmente dizer que isto seria devido à rotação oposta do conjunto das estrelas fixas, estando a água em repouso. Mas Leibniz não mencionou explicitamente esta possibilidade. Neste sentido ele não soube dar uma resposta clara aos argumentos newtonianos utilizando sua teoria relacional do movimento. Por este motivo também concordamos com Erlichson quando este afirmou: "Na minha opinião Leibniz nunca respondeu realmente a Clarke e a Newton sobre a experiência do balde ou sobre os outros exemplos que eles deram para mostrar os efeitos dinâmicos do movimento absoluto", [Erl67].

Em ao menos um ponto na correspondência Clarke viu melhor do que Leibniz as conseqüências de uma teoria completamente relacional do movimento no que diz respeito à origem da força centrífuga. Na sua quinta réplica a Leibniz, Clarke disse (parágrafos 26 a 32, págs. 220-221 de [Lei83]):

> Afirma-se [por Leibniz] que o movimento encerra necessariamente uma mudança relativa de situação num corpo com relação a outros corpos, e entretanto não se fornece nenhum meio para evitar esta conseqüência absurda, como seja, que a mobilidade de um corpo depende da existência de outros, de modo que, se um corpo existisse sozinho, seria incapaz de movimento, ou que as partes de um corpo que circula (ao redor do Sol, p. ex.) perderiam a força centrífuga que nasce de seu movimento circular, se toda a matéria exterior que as cerca fosse aniquilada.

A expressão original em inglês no final desta frase é: "(...) or that the parts of a circulating body, (suppose the sun,) would lose (...)" Uma tradução alternativa é a que aparece em [Koy86, pág. 250]: "(...) ou de que as partes de um corpo girante (suponhamos o sol) perderiam (...)"

Infelizmente Leibniz não respondeu a esta última réplica que foi transmitida a ele em 29 de outubro de 1716, sendo que ele morreu em 14 de novembro do mesmo ano. De qualquer forma estas conseqüências que Clarke chamou de "absurdas" representam partes importantes de qualquer teoria relacional do movimento. Se seguimos completamente uma teoria relacional do movimento não há sentido na afirmação de que um corpo isolado se move em relação ao espaço, apenas podemos afirmar que ele se move em relação a outros corpos. Assim, o movimento de um corpo depende da existência de outros corpos. Muito mais importante do que isto é a conseqüência apontada por Clarke de que a força centrífuga desapareceria se os corpos externos fossem aniquilados. Isto é, a Terra deixaria de ser achatada nos pólos, os planetas não poderiam orbitar ao redor do Sol pois não haveria nada para se contrapor à atração gravitacional entre eles e então o sistema solar colapsaria, a água que gira com o balde em relação à Terra não ficaria mais côncava etc. Isto é uma conseqüência necessária de uma teoria completamente relacional e é implementada na mecânica relacional, como mostramos neste livro. Isto não é uma conseqüência "absurda" de qualquer teoria realmente relacional do movimento, mas uma conseqüência necessária que em princípio pode ser testada experimentalmente (pode-se tentar verificar em laboratório a existência de um efeito análogo a este apontado por Clarke), como veremos. Clarke foi o primeiro a apontar claramente o fato de que numa teoria puramente relacional, a força centrífuga aparece apenas quando há uma rotação relativa entre o corpo de prova e o universo material distante. Se aniquilamos o universo distante, as conseqüências dinâmicas da força centrífuga têm de desaparecer concomitantemente. Infelizmente outras pessoas não perceberam ou não foram tocadas pelo significado das conseqüências apontadas por Clarke.

Leibniz acreditava que movimentos cinematicamente equivalen-

tes devem ser dinamicamente equivalentes. Isto é evidente pelo que disse antes: "temos de considerar que quaisquer que sejam as maneiras como muitos corpos possam estar em movimento, não podemos inferir a partir dos fenômenos quais deles têm realmente movimento absoluto e determinado, ou [estão em] repouso. Ao invés disto, podemos atribuir o repouso a qualquer um deles que escolhermos e ainda assim resultarão os mesmos fenômenos." Apesar desta crença, ele não implementou esta idéia quantitativamente. Por exemplo, ele não mostrou como um céu de estrelas girando poderia gerar forças centrífugas. Ele também não mencionou a proporcionalidade entre as massas inercial e gravitacional (ou entre inércia e peso). Ele não chegou nem mesmo a sugerir a possibilidade de as forças centrífugas surgirem de uma interação gravitacional.

Embora ele defendesse algumas idéias que conflitavam com a mecânica newtoniana, ele não as desenvolveu matematicamente. O estágio de conhecimento das ciências físicas em seu tempo, em particular o conhecimento do eletromagnetismo, ainda não estava maduro para suprir a chave de como implementar estas idéias quantitativamente.

5.2 Berkeley e o Movimento Relativo

O bispo G. Berkeley (1685-1753) criticou os conceitos newtonianos de espaço, tempo e movimento absolutos principalmente nas Seções 97 a 99 e 110 a 117 de seu trabalho *Tratado sobre os Princípios do Conhecimento Humano* de 1710 (que já se encontra traduzido para o português, [Ber80]) e nas Seções 52 a 65 de seu trabalho *Sobre o Movimento - ou o Princípio e a Natureza do Movimento e a Causa da Comunicação dos Movimentos*, mais conhecido por seu primeiro nome em latim, *De Motu*, de 1721. Para uma tradução completa em inglês ver: [Ber92]. Uma boa discussão de sua filosofia do movimento pode ser encontrada em [Whi53] e em [Pop53].

Na Seção 112 dos *Princípios* ele defendeu uma teoria relacional como segue, [Ber80]:

> 112. Confesso, não obstante, que não me parece possa haver outro movimento além do *relativo*; para conceber o

> movimento é preciso conceber pelo menos dois corpos a distância e em posição variáveis. Se houvesse um corpo só, não poderia mover-se. Isto parece evidente; a idéia que tenho de movimento inclui necessariamente a relação.

Analogamente, na Seção 63 do *De Motu* temos, [Ber92].

> Nenhum movimento pode ser reconhecido ou medido, a não ser através de coisas sensíveis. Como o espaço absoluto não afeta os sentidos de modo nenhum, ele necessariamente tem de ser bem inútil para a distinção dos movimentos. Além disso, a determinação ou direção é essencial para o movimento; mas isto consiste numa relação. Portanto, é impossível que se possa conceber o movimento absoluto.

Mas Berkeley também parece contradizer a si próprio, como tinha acontecido com Leibniz, quando ele leva em conta as forças. Ele acaba concedendo alguma realidade absoluta para as forças e nesta forma também se deixou levar pelos argumentos newtonianos. Por exemplo, no parágrafo 113 dos *Princípios* ele disse:

> 113. Mas, conquanto em cada movimento tenha de haver mais de um corpo, pode mover-se apenas um, aquele onde se aplica a força causadora da mudança de distância ou de situação. Porque, embora alguns definam movimento relativo para denominar o corpo *movido* que varia de distância a outro, quer a força causadora seja aplicada nele, quer não, e como movimento relativo é o percebido pelos sentidos e observado na vida diária, parece que todo homem sensato o conhece tão bem como o melhor filósofo. Ora, pergunto eu se neste sentido, quando alguém passeia na rua, poderá falar-se de *movimento* das pedras da calçada. Parece-me não ser de necessidade, embora o movimento implique a relação entre duas coisas, cada termo da relação seja denominado por ele. Como um homem pode pensar em alguma coisa que não pensa, assim um corpo pode ser movido para ou desde outro que nem por isso está em movimento.

Mas mesmo se há apenas movimento relativo, como poderia ele explicar as experiências do balde e dos dois globos de Newton sem introduzir o espaço absoluto? Ele não é completamente claro neste sentido, mas parece que ele achava que a forma côncava da superfície da água no balde girando só surgia devido a sua rotação relativa em relação ao céu de estrelas fixas. A mesma explicação daria conta da tensão na corda na experiência dos dois globos. Isto é, estes efeitos dinâmicos estariam relacionados ao movimento cinemático entre o corpo de prova e as estrelas e não entre o corpo de prova e o espaço absoluto. Para mostrar esta possível interpretação das idéias de Berkeley, apresentamos aqui a Seção 114 dos *Princípios* onde ele discute a experiência do balde:

> 114. Como o "lugar" é variadamente definido, varia o movimento correlato.Em um navio um homem pode dizer-se imóvel em relação as bordas do navio e em movimento relativamente a Terra; ou movendo-se para leste quanto as primeiras e para oeste quanto a segunda. Na vida corrente, ninguém pensa além da Terra para definir o lugar de um corpo; e o que é imóvel neste sentido é assim considerado *absolutamente*. Mas os filósofos, de mais vasto pensamento e mais adequada noção do sistema das coisas, descobrem que a mesma Terra é móvel. Para fixar as suas noções parece conceberem mundo corpóreo como finito e os seus extremos imóveis o lugar pelo qual avaliamos [avaliam] os movimentos verdadeiros. Se examinarmos a nossa própria concepção, creio concluiremos serem todos os movimentos absolutos concebíveis enfim e somente movimentos relativos assim definidos. [Original: If we sound our conceptions, I believe we may find all the absolute motion we can frame an idea of to be at bottom no other than relative motion thus defined. Nossa tradução: Se examinarmos a nossa própria concepção, creio podermos encontrar que todo movimento absoluto do qual podemos formar uma idéia será, no fundo, nada mais do que movimento relativo assim concebido.] Como já observamos, movimento absoluto; exclusivo de toda relação externa, é incompreen-

> sível. E com esta espécie de movimento relativo todas as propriedades mencionadas, causas e efeitos atribuídos ao movimento absoluto vêm concordar, se não me engano. Quanto a não pertencer a força centrífuga ao movimento circular relativo, não vejo como isso pode concluir-se da experiência apresentada (v. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* no Escólio, Definição VIII). Porque a água do vaso no momento em que se diz ter o maior movimento relativo circular não tem, penso eu, movimento algum, como vamos ver. [Esta última frase termina assim: "as is plain from the foregoing section." Preferimos traduzir o final por "como é evidente da seção anterior"].

Parece-nos que quando Berkeley afirma que os filósofos concebem o mundo corpóreo como finito e que eles avaliam os movimentos verdadeiros pelos extremos imóveis deste mundo corpóreo finito, que ele está querendo dizer o céu de estrelas fixas. Isto é, de acordo com Berkeley, os filósofos colocam, por convenção, o céu de estrelas fixas em repouso e avaliam o movimento dos outros corpos celestes (planetas e cometas, por exemplo) em relação a este sistema de referência das estrelas fixas. E quando Berkeley afirma que no início da experiência do balde de Newton a água não tem movimento algum, parece-nos que ele quer dizer que não há movimento da água em relação à Terra ou em relação ao céu de estrelas. Afinal de contas, na situação descrita por Newton o maior movimento relativo entre o balde e a água ocorre após o balde ter sido solto e começou a girar rapidamente em relação à Terra, enquanto que a água não chegou a ter tempo de girar junto com o balde. Se esta é a interpretação correta das idéias de Berkeley, seguiria que para ele a forma côncava da superfície da água surgiria apenas quando houvesse uma rotação relativa entre a água e a Terra (ou entre a água e o conjunto das estrelas fixas), embora não pudéssemos atribuir uma rotação absoluta e real nem para a água nem para a Terra (ou nem para o conjunto de estrelas fixas). Mas obviamente estamos aqui atribuindo mais a Berkeley do que o que ele realmente disse. Como vimos antes ao mostrar e discutir o §113 (ver especialmente a primeira frase), algumas vezes Berkeley é confundido pelos argumentos de Newton. Nestes casos fala então de

força como algo absoluto, indicando que podemos saber qual corpo está realmente e absolutamente em movimento ao observar em qual corpo a força está agindo. Esta afirmação, contudo, não faz sentido numa teoria completamente relacional.

Ele sugeriu mais claramente do que Leibniz substituir o espaço absoluto de Newton pelo céu de estrelas fixas na Seção 64 do *De Motu*:

> 64. Além do mais, como o movimento do mesmo corpo pode variar com a diversidade do lugar relativo e mais ainda como na verdade uma coisa pode ser dita estar em movimento num sentido e num outro sentido estar em repouso, para determinar o movimento e repouso verdadeiros, para remover a ambiguidade e para o avanço da mecânica destes filósofos que consideram a visão mais ampla do sistema de coisas, seria suficiente introduzir, ao invés do espaço absoluto, o espaço relativo restrito ao céu de estrelas fixas, considerado como estando em repouso. O movimento e o repouso definidos por este espaço relativo podem ser usados convenientemente ao invés dos absolutos, que não podem ser distinguidos deles por qualquer indício. (...)

Duzentos anos depois Mach também vai propor substituir o espaço absoluto de Newton pelo céu de estrelas fixas.

Nas Seção 58 a 60 do *De Motu* Berkeley discutiu as experiências dos dois globos e do balde de Newton:

> 58. Do que já foi mencionado fica claro que não temos de definir o lugar verdadeiro de um corpo como a parte do espaço absoluto ocupada pelo corpo e o movimento verdadeiro ou absoluto como a mudança do lugar verdadeiro ou absoluto, pois todo lugar é relativo assim como todo movimento é relativo. Mas para fazer com que isto apareça mais claramente temos de chamar a atenção que nenhum movimento pode ser compreendido sem alguma determinação ou direção, as quais por sua vez não podem ser entendidas a não ser que exista ao mesmo tempo

também nosso próprio corpo ou algum outro corpo. Pois *para cima, para baixo, esquerda* e *direita* e todos os lugares e regiões são encontrados em alguma relação e conotam e supõem necessariamente um corpo diferente do corpo em movimento. De tal forma que supondo os outros corpos terem sido aniquilados e, por exemplo, um globo existisse sozinho, não se poderia conceber nenhum movimento nele; de tão necessário é que seja dado um outro corpo em relação ao qual o movimento possa ser determinado. A verdade desta opinião será vista claramente se cumprirmos completamente a suposta aniquilação de todos os corpos, de nosso próprio e de todos os outros, exceto daquele globo solitário.

59. Conceba então existirem dois globos e nada corpóreo além deles. Conceba também forças sendo aplicadas de alguma maneira; qualquer que seja nossa compreensão do que é aplicação de forças, a imaginação não pode conceber um movimento circular dos dois globos ao redor de um centro comum. Suponhamos então que o céu de estrelas fixas seja criado; subitamente a partir da noção da aproximação dos globos em direção a partes diferentes deste céu pode-se conceber o movimento. Quer dizer, como o movimento é relativo por sua própria natureza, ele não podia ser concebido antes que os corpos correlacionados fossem dados. Similarmente, nenhuma outra relação pode ser compreendida sem os correlatos.

60. No que diz respeito ao movimento circular, muitos pensam que, na medida em que o movimento verdadeiramente circular aumenta, o corpo tende necessariamente cada vez mais para fora de seu eixo. Esta crença surge do fato de que o movimento circular pode ser visto como tendo sua origem, por assim dizer, em cada momento a partir de duas direções, uma ao longo do raio e outra ao longo da tangente e se o ímpeto for aumentado apenas nesta última direção, então o corpo em movimento vai se afastar do centro e sua órbita cessará de ser cir-

> cular. Mas se as forças forem aumentadas igualmente em ambas as direções o movimento permanecerá circular embora acelerado - o que não vai apoiar um aumento nas forças para se afastar do eixo mais do que nas forças para se aproximar dele. Portanto, temos de dizer que a água sendo forçada no balde sobe em direção aos lados do recipiente porque quando novas forças são aplicadas na direção da tangente em qualquer partícula da água, no mesmo instante não são aplicadas novas forças centrípetas iguais. Desta experiência não segue de maneira alguma que o movimento circular absoluto seja reconhecido necessariamente pelas forças de se afastar do eixo de movimento. Novamente, como se deve entender os termos *forças corpóreas* e *pressão* [*connation*] está mais do que suficientemente mostrado na discussão precedente.

Isto é, para Berkeley só faz sentido dizer que os dois globos giram quando temos outros corpos em relação aos quais podemos referir o movimento. Além do mais, esta rotação será apenas relativa pois não podemos dizer cinematicamente se são os globos que estão em movimento giratório enquanto o céu de estrelas fixas está em repouso ou o oposto. Mas ele não diz explicitamente que a tensão na corda ligando os globos só vai aparecer quando há esta rotação relativa entre os globos e o céu de estrelas fixas. Ele também não diz explicitamente que a tensão na corda só vai aparecer quando se cria o céu de estrelas fixas, como havia sido apontado por Clarke.

No que diz respeito a sua discussão da experiência do balde girante, novamente Berkeley não enfatizou o papel das estrelas fixas na geração das forças centrífugas. Também não disse que a água ficaria plana se os outros corpos do universo fossem aniquilados.

Por estes motivos concordamos com Jammer quando afirmou que Berkeley se limitou ao problema da percepção e compreensibilidade do movimento, ignorando neste contexto o aspecto dinâmico do problema, [Jam69, pág. 109].

Mas mesmo se estas fossem as interpretações corretas de suas idéias, Berkeley não as implementou quantitativamente. Isto é, ele não apresentou uma lei de força específica mostrando que quando

mantemos os globos ou a água em repouso (por exemplo, em relação à Terra ou a um observador material) e giramos o céu de estrelas fixas (novamente em relação a Terra ou a um observador material), que então vai aparecer uma força centrífuga real criando a tensão na corda e empurrando a água contra as paredes do balde devido a esta rotação relativa.

Ele também não mencionou a proporcionalidade entre inércia e o peso, ou entre as massas inerciais e gravitacionais. Não chegou nem mesmo a sugerir que a força centrífuga poderia ser devido a uma interação *gravitacional* do corpo de prova com a matéria distante.

Muitos outros discutiram estes aspectos da teoria newtoniana antes de Mach, sem porém avançar muito além do que Newton, Leibniz ou Berkeley fizeram. A maior parte deles defendeu as idéias de Newton. Para uma discussão ver [Jam69, Cap. 5], [Ale84, págs. xl a xlix], [Mol93] e [Ghi95]. Não entraremos em detalhes aqui sobre estes autores já que as principais idéias foram desenvolvidas por Leibniz e por Berkeley. Estes pontos de vista foram grandemente aprofundados, explorados e desenvolvidos por Mach. Este é o assunto do próximo Capítulo.

Capítulo 6

Mach e a Mecânica de Newton

6.1 Sistema de Referência Inercial

Neste Capítulo apresentamos as críticas de Ernst Mach (1838-1916) à mecânica newtoniana. Vamos seguir alguns dos exemplos discutidos nos Capítulos anteriores para ilustrar alguns aspectos da mecânica clássica que Mach considerava negativos e o que ele sugeriu para superá-los.

Começamos com o problema do movimento retilíneo uniforme. De acordo com a primeira lei do movimento de Newton (a lei da inércia), se não há força resultante agindo sobre um corpo ele vai permanecer em repouso ou então vai mover-se em uma linha reta com uma velocidade constante. Mas em relação a que sistema de referência vai o corpo permanecer em repouso ou em movimento retilíneo uniforme? De acordo com Newton é em relação ao espaço absoluto ou a qualquer outro sistema de referência que se move com uma velocidade constante em relação ao espaço absoluto. O problema com esta afirmação é que não temos qualquer acesso ao espaço absoluto, isto é, não podemos saber nossa posição ou velocidade em relação ao espaço absoluto. Mach queria que a física se livrasse destas noções de espaço e tempo absolutos. No Prefácio da primeira edição (1883) de seu livro *A Ciência da Mecânica*, Mach disse: "Este volume não é um tratado sobre a aplicação dos princípios da mecânica. Seus objetivos são de esclarecer as idéias, expor o significado real do assunto e ficar livre de obscuridades metafísicas", [Mac60]. No Prefácio da sétima edição alemã (1912) deste livro escreveu:

> O caráter do livro permaneceu o mesmo. Em relação às concepções monstruosas de espaço absoluto e tempo absoluto não posso retratar-me em nada. Aqui mostrei apenas mais claramente do que até então que Newton de fato falou muito sobre estas coisas, mas por toda a parte não

> fez aplicações sérias delas. Seu quinto corolário[1] contém o único *sistema inercial* usado na prática (provavelmente aproximado).

O que Mach sugeriu para substituir o espaço absoluto de Newton? Ele propôs o restante da matéria no universo ([Mac60], págs. 285-6):

> O comportamento dos corpos terrestres em relação à Terra é reduzível ao comportamento da Terra em relação aos corpos celestes remotos. Se fôssemos defender que sabemos mais dos objetos móveis do que este seu último comportamento, dado experimentalmente em relação aos corpos celestes, nos tornaríamos culpados de falsidade. Quando, consequentemente, dizemos que um corpo mantém inalteradas sua direção e velocidade no espaço, nossa afirmativa não é nada mais nada menos do que uma referência abreviada a todo o universo.

Sua resposta mais clara aparece nas páginas 336-337 de seu livro já mencionado, nossa ênfase:

> 4. Tenho um outro ponto importante a discutir agora contrário a C. Neumann,[2] cuja publicação bem conhecida sobre este tópico precedeu a minha[3] por pouco tempo. Defendi que a direção e velocidade que são levadas em conta na lei da inércia não têm significados compreensíveis se a lei se referir ao "espaço absoluto." De fato, só podemos determinar metricamente a direção e velocidade num espaço no qual os pontos são diretamente ou indiretamente marcados por corpos dados. O tratado de Neumann e o meu próprio tiveram sucesso em chamar

---

[1] *Principia*, 1687, pág. 19.

[2] *Die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie*, Leipzig, 1870.

[3] *Erhaltung der Arbeit*, Prague, 1872. (Traduzida parcialmente para o inglês no artigo "A Conservação da Energia," *Popular Scientific Lectures*, terceira edição, Chicago, 1898.)

> nova atenção para este ponto, que já tinha causado muito desconforto intelectual a Newton e a Euler; apesar disto não resultaram nada mais do que tentativas parciais de solução, como aquela de Streintz. *Permaneço até o dia de hoje como a única pessoa que insiste em referir à lei de inércia à Terra e, no caso de movimentos de grande extensão espacial e temporal, às estrelas fixas.*

Concordamos completamente com Mach neste ponto. Esta última sentença é uma formulação muito melhor da lei da inércia do que a de Newton em termos do espaço absoluto. Isto é, em experiências típicas de laboratório que duram muito menos do que uma hora e que não se estendem muito no espaço comparado com o raio terrestre (como no estudo de molas, movimento de projéteis, colisão de duas bolas de bilhar etc.) podemos utilizar a Terra como nosso sistema inercial. Isto significa que podemos aplicar as leis de Newton do movimento sem as forças fictícias neste referencial com o fim de estudar estes movimentos com uma razoável precisão. Por outro lado, em experiências que duram muitas horas (como no pêndulo de Foucault) ou nas quais estudamos movimentos com escalas temporais e espaciais grandes (como no caso de ventos, correntes marítimas etc.) um sistema de referência inercial melhor do que a Terra é o referencial definido pelas estrelas. O conjunto das estrelas fixas é também um bom sistema inercial para estudar a rotação diurna da Terra ou sua translação anual ao redor do Sol. Nestes casos a aplicação das leis de Newton vai dar ótimos resultados sem precisar levar em conta as forças fictícias neste referencial das estrelas fixas. Hoje em dia podemos dizer que um sistema de referência inercial melhor ainda para estudar a rotação ou movimento de nossa galáxia como um todo (em relação as outras galáxias, por exemplo) é o referencial definido pelas galáxias externas ou o sistema de referência no qual a radiação cósmica de fundo é isotrópica.

No século XIX, alguns autores propuseram o éter luminoso como um substituto do espaço absoluto de Newton. Não discutiremos estas idéias aqui. Para uma discussão sobre este ponto ver [Oli93].

6.2 As Duas Rotações da Terra

Mach estava ciente das evidências observacionais de que a rotação cinemática da Terra em relação às estrelas fixas é a mesma que a rotação dinâmica da Terra. Isto é, o melhor sistema de referência conhecido na época (aquele no qual podemos aplicar com sucesso a segunda lei de Newton do movimento sem introduzir as forças fictícias como a centrífuga e a de Coriolis) não gira em relação ao céu de estrelas fixas. Ele expressou este fato nas páginas 292-293 de *A Ciência da Mecânica*: "Seeliger tentou determinar a relação do sistema inercial com o sistema de coordenadas astronômico empírico que está em uso e acredita poder afirmar que o sistema empírico não pode girar ao redor do sistema inercial por mais do que alguns segundos de arco num século." Jammer discutiu o trabalho de Seeliger em [Jam69, pág. 141].

Hoje em dia sabemos que se há uma rotação entre estes dois sistemas de referência (o inercial e o das estrelas fixas), ela é menor do que 0,4 segundos de arco por século, [Sch64], isto é:

$$\omega_k - \omega_d \leq \pm 0.4 \ seg/s\acute{e}culo = \pm 1.9 \times 10^{-8} \ rad/ano \ .$$

Como $\omega_k = 2\pi/T = 2\pi/(24 \ horas) = 7.29 \times 10^{-5} \ rad/s$ obtemos:

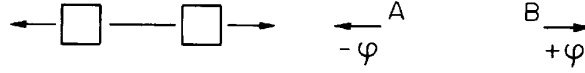
$$\frac{\omega_k - \omega_d}{\omega_k} \leq \pm 8 \times 10^{-12} \ .$$

Poucos fatos na física têm uma precisão de uma parte em 10^{11} como aqui (um outro exemplo, como vimos anteriormente, é a proporcionalidade entre a massa inercial e o peso). Este é um dos pilares empíricos mais fortes a favor do princípio de Mach. É difícil aceitar este fato como uma simples coincidência. Como já vimos, este fato é equivalente à afirmação de que o universo como um todo (o conjunto das galáxias) não gira em relação ao espaço absoluto. Este fato sugere que é a matéria distante que determina e estabelece o melhor referencial inercial. Se é este o caso, precisamos entender e explicar esta conexão entre a matéria distante e os sistemas inerciais locais. Uma resposta a este enigma não é encontrado na mecânica newtoniana já que nela não há nenhuma relação das estrelas fixas e das galáxias distantes com os referenciais inerciais.

6.3 Massa Inercial

Um outro problema na mecânica clássica é aquele da quantidade de matéria ou massa inercial, ou seja, da massa que aparece na segunda lei do movimento de Newton, no momento linear, no momento angular e na energia cinética. Newton a definiu como o produto do volume do corpo por sua densidade. Esta é uma definição pobre já que usualmente definimos a densidade como a razão entre a massa inercial ou quantidade de matéria pelo volume do corpo. Esta definição de Newton só seria útil e evitaria círculos viciosos se Newton houvesse especificado como definir e medir a densidade do corpo sem usar o conceito de massa, coisa que ele não fez. O primeiro artigo escrito por Mach onde ele criticou esta definição e apresentou uma outra melhor é de 1868. Ele foi reimpresso no livro de Mach intitulado *A História e as Raízes do Princípio de Conservação da Energia*, de 1872, [Mac81], págs. 80-85. No livro *A Ciência da Mecânica* ele elaborou um pouco mais sua nova proposta. Entre outras coisas, afirmou: "A definição I é uma pseudo-definição, como já foi demonstrado. O conceito de massa não fica mais claro descrevendo a massa como o produto do volume pela densidade, já que a própria densidade denota simplesmente a massa pela unidade de volume. A definição verdadeira de massa só pode ser deduzida das relações dinâmicas dos corpos", [Mac60], pág. 300.

Ao invés da definição de Newton, Mach propôs ([Mac60], pág. 266):

> *Diz-se que têm massas iguais todos os corpos que, ao agir mutuamente um sobre o outro, produzem em cada um acelerações iguais e opostas.*
>
> Nesta definição nós simplesmente designamos, ou nomeamos, uma relação real das coisas. No caso geral procedemos similarmente. Os corpos A e B recebem, respectivamente, as acelerações $-\varphi$ e $+\varphi'$ como um resultado de suas ações mútuas (ver Figura), onde os sentidos das acelerações estão indicados pelos sinais.

> Dizemos então que B tem φ/φ' vezes a massa de A. *Se tomamos A como nossa unidade, atribuimos ao corpo [B] que comunica a A m vezes a aceleração que A comunica a ele por reação, a massa m.* A razão das massas é o negativo da razão inversa das contra-acelerações. A experiência nos ensina, sendo que somente ela pode nos ensinar isto, que estas acelerações têm sinais opostos, que há, portanto, de acordo com a nossa definição, apenas massas positivas. No nosso conceito de massa não está envolvida nenhuma teoria; a "quantidade de matéria" é completamente desnecessária nele; tudo que ele contém é a fundação exata, designação e determinação de um fato.

Nesta definição chave de massa inercial, Mach não especificou claramente o sistema de referência em relação ao qual se deve medir as acelerações. É simples perceber que esta definição depende do sistema de referência. Por exemplo, observadores que estão acelerados em relação um ao outro vão encontrar razões de massa diferentes ao analisar a mesma interação de dois corpos se cada observador utilizar seu próprio sistema de referência para definir as acelerações e chegar nas massas. Damos aqui um exemplo disto. Consideramos um problema unidimensional no qual dois corpos 1 e 2 ao interagir um com o outro recebem as acelerações a_1 e $-a_2$, respectivamente, em relação a um sistema de referência O, Figura 6.1.

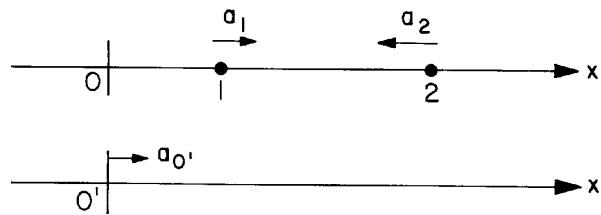



Figura 6.1: Acelerações de dois corpos em relação a O.

Suponha agora um outro sistema de referência O' com uma aceleração $a_{o'}$ em relação a O. As acelerações dos corpos 1 e 2 em relação a O' serão dadas por, respectivamente: $a'_1 = a_1 - a_{o'}$ e $a'_2 = -a_2 - a_{o'}$, ver Figura 6.2.

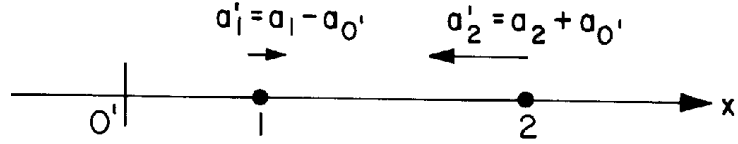



Figura 6.2: Acelerações de dois corpos em relação a O'.

Utilizando a definição de Mach, a razão de massas dos corpos 1 e 2 em relação a O será dada por $m_1/m_2 = -(-a_2/a_1) = a_2/a_1$. Por outro lado, a razão das massas em relação a O' será dada por: $m'_1/m'_2 = -(-a'_2/a'_1) = (a_2 + a_{o'})/(a_1 - a_{o'}) \neq m_1/m_2$. Isto é, se pudermos utilizar qualquer sistema de referência para definir a razão das massas, então esta definição vai ficar sem sentido pois vão haver tantas razões de massa diferentes para o mesmo par de corpos, quantos são os sistemas de referência acelerados em relação um ao outro. Ou seja, o valor m_1/m_2 vai ficar dependendo do sistema de referência e isto é certamente indesejável.

Mas é evidente dos seus escritos que Mach tinha em mente o referencial das estrelas fixas como sendo o único referencial a ser utilizado nesta definição. Isto foi mostrado conclusivamente num artigo importante de Yourgrau e van der Merwe, [YvdM68]. Citamos aqui alguns trechos de Mach para provar que esta é a interpretação correta que ele próprio queria dar: Ao discutir a experiência do balde, Mach disse: "O sistema de referência natural para ele [Newton] é aquele que tem qualquer movimento uniforme ou translação sem rotação (relativamente à esfera das estrelas fixas)" [Mac60], pág. 281. Estas palavras entre parêntesis são do próprio Mach e não vieram de Newton. Na página 285 ele disse: "Agora, para ter um sistema de referência válido em geral, Newton expôs o quinto corolário do *Principia* (pág. 19 da primeira edição). Ele imaginou um sistema de coordenadas terrestre momentâneo, no qual a lei de inércia é válida, bem firme

no espaço sem qualquer rotação em relação às estrelas fixas.” Mais uma vez estas últimas palavras (em relação às estrelas fixas) são de Mach e não de Newton. E nas páginas 294-295 disse: “Não há, creio, diferença de significado entre Lange e eu próprio (...) em relação ao fato de que, atualmente, o céu de estrelas fixas é o único sistema de referência útil na prática e em relação ao método de obter um novo sistema de referência por correção gradual.”

Deve ser observado que hoje em dia aceita-se esta definição operacional de Mach para a massa inercial ($m_1/m_2 = -a_2/a_1$) e não a de Newton ($m_i = \rho V$), embora nem sempre se cite o nome de Mach. Ver, por exemplo, [Sym82, Seção 1.3]. Esta foi uma contribuição muito importante que Mach deu para os fundamentos da mecânica clássica.

6.4 A Formulação de Mach da Mecânica

Após clarificar estes pontos, apresentamos aqui a formulação de Mach para a mecânica, sugerida por ele para substituir os postulados e corolários de Newton. Ele apresentou pela primeira vez esta formulação em 1868, ver [Mac81], especialmente as páginas 84 e 85. Apresentamos aqui sua formulação final, ver [Mac60], págs. 303-304:

> Mesmo se aderimos absolutamente aos pontos de vista newtonianos e deixamos de lado as complicações e características indefinidas já mencionadas, que não são removidas mas apenas disfarçadas pelas designações abreviadas de “Tempo” e “Espaço,” é possível substituir os enunciados de Newton por proposições muito mais simples, melhor arranjadas metodicamente e mais satisfatórias. Tais proposições seriam as seguintes, em nossa opinião:
>
> *a. Proposição experimental.* Corpos colocados em frente um do outro induzem em cada um, sob certas circunstâncias a serem especificadas pela física experimental, *acelerações* contrárias na direção da linha que os une. (O princípio da inércia está incluído aqui.)

> *b. Definição.* A razão de massas de quaisquer dois corpos é o negativo da razão inversa das acelerações mutuamente induzidas destes corpos.
>
> *c. Proposição experimental.* As razões de massa dos corpos são independentes do caráter dos estados físicos (dos corpos) que condicionam as acelerações mútuas produzidas, sejam estes estados elétrico, magnético, ou qualquer outro; e elas permanecem, além disto, as mesmas, quer cheguemos a elas por intermediários ou imediatamente.
>
> *d. Proposição experimental.* As acelerações que qualquer número de corpos A, B, C ... induzem num corpo K, são independentes uma da outra. (O princípio do paralelogramo de forças segue imediatamente daqui.)
>
> *e. Definição.* A força motriz é o produto do valor da massa do corpo pela aceleração induzida neste corpo.

Estas são proposições claras e razoáveis, desde que saibamos o sistema de referência em relação ao qual as acelerações devam ser medidas. Como já vimos, para Mach, um sistema de referência ao qual se deve referenciar estas acelerações é a Terra. Se necessitamos de uma melhor precisão ou de razões de massa mais corretas, ou ainda se estamos lidando com corpos astronômicos, então de acordo com Mach precisamos utilizar o referencial das estrelas fixas.

Esta formulação machiana da mecânica é muito melhor do que a newtoniana. Contudo, isto ainda não é suficiente. Ela não explica a proporcionalidade entre inércia e peso (ou entre m_i e m_g), ela não explica porque o conjunto de estrelas fixas é um bom referencial inercial (ou porque o conjunto das estrelas fixas não gira em relação aos referenciais inerciais) e também não explica a origem das forças fictícias (como a centrífuga e a de Coriolis). Embora esta formulação represente um progresso considerável em relação a Newton, Leibniz e Berkeley, a implementação quantitativa completa da mecânica relacional requer muito mais do que Mach realizou. Apesar disto ele deu um grande passo adiante na direção correta.

6.5 Mecânica Relacional

Além destas clarificações e de sua nova formulação da mecânica, Mach apresentou duas sugestões e percepções extremamente relevantes. A primeira foi a de enfatizar que na mecânica devemos ter apenas grandezas relacionais. Isto é, a física deve depender somente da distância relativa entre corpos e de suas velocidades relativas, mas não de posições ou de velocidades absolutas. As grandezas absolutas não devem aparecer na teoria já que elas não aparecem nas experiências. Sua segunda grande sugestão está relacionada com a experiência do balde, assunto que discutiremos mais adiante. Inicialmente discutimos seus comentários relacionados com a mecânica relacional.

Suas afirmações neste sentido podem ser encontradas em diversos lugares de *A Ciência da Mecânica*, de onde tiramos o seguinte (nossa ênfase):

> pág. 279: Se, em um sistema espacial material, há massas com velocidades diferentes, que podem entrar em relações mútuas umas com as outras, então estas massas nos apresentam forças. Só podemos decidir quão grandes são estas forças quando sabemos as velocidades a que estas massas são levadas. Massas *em repouso* também representam forças se *todas* as massas não estão em repouso. Pense, por exemplo, no balde girante de Newton no qual a água ainda não está girando. Se a massa m tem a velocidade v_1 e é para ser levada até a velocidade v_2, a força que tem de ser dispendida nela é $p = m(v_1 - v_2)/t$, ou o trabalho que tem de ser feito é $ps = m(v_1^2 - v_2^2)$. *Todas as massas e todas as velocidades e, conseqüentemente, todas as forças, são relativas.* Não há decisão a que podemos chegar entre absoluto e relativo, ao qual sejamos forçados ou da qual possamos obter qualquer vantagem intelectual ou de outro tipo. Quando autores bem modernos se deixam levar pelos argumentos newtonianos que são derivados do balde de água, a distinguir entre movimento relativo e absoluto, eles não refletem que o sistema do mundo é dado apenas *uma vez* para nós e que a visão ptolomaica ou

> copernicana é *nossa* interpretação, mas ambas são igualmente verdadeiras. *Tente fixar o balde de Newton e girar o céu das estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas.*

> págs. 283-284: Vamos examinar agora o ponto sobre o qual Newton se baseia, aparentemente com motivos razoáveis, para sua distinção do movimento absoluto e relativo. Se a Terra sofre uma rotação *absoluta* ao redor de seu eixo, forças centrífugas aparecem na Terra: ela assume uma forma oblata, a aceleração da gravidade é diminuída no equador, o plano do pêndulo de Foucault gira e assim por diante. Todos estes fenômenos desaparecem se a Terra fica em repouso e os outros corpos celestes sofrem um movimento absoluto ao redor dela, tal que a mesma rotação *relativa* seja produzida. Este é, de fato, o caso, se começamos desde o início [*ab initio*] com a idéia de espaço absoluto. Mas se nos baseamos nos fatos, encontraremos que só temos conhecimento dos espaços e movimentos *relativos. Relativamente, sem considerar o meio desconhecido e desprezado do espaço, os movimentos do universo são os mesmos quer adotemos o ponto de vista ptolomaico ou o copernicano. Ambos pontos de vista são, na verdade, igualmente corretos; apenas que o último é mais simples e mais prático.* O universo não é dado duas vezes, com uma Terra em repouso e com uma Terra em movimento; mas apenas uma vez, com seus movimentos *relativos* sendo os únicos determináveis. Concomitantemente, não nos é permitido dizer como seriam as coisas se a Terra não girasse. Podemos interpretar o caso único que nos é dado de formas diferentes. Se, contudo, o interpretarmos de forma a ficar em conflito com a experiência, nossa interpretação está simplesmente errada. *Os princípios da mecânica podem, de fato, ser concebidos tal que mesmo para rotações relativas surgem as forças centrífugas.*

A partir destas e de outras citações compreendemos que de acordo

com Mach, uma mecânica relacional deve depender apenas de grandezas relativas como a distância entre corpos, $r_{mn} = |\vec{r}_m - \vec{r}_n|$ e suas derivadas temporais: $\dot{r}_{mn} = dr_{mn}/dt$, $\ddot{r}_{mn} = d^2 r_{mn}/dt^2$, $d^3 r_{mn}/dt^3$ etc. Além do mais, os conceitos de espaço e tempo absolutos não devem aparecer.

6.6 Mach e a Experiência do Balde

Quando Mach discutiu a experiência do balde de Newton, ele enfatizou fortemente o fato de que não podemos desprezar os corpos celestes na análise da experiência. De acordo com Mach, a forma parabólica da água girante é devido à sua rotação relativa em relação às estrelas fixas e não devido a sua rotação em relação ao espaço absoluto. Por exemplo, na página 284 de *A Ciência da Mecânica*, ele disse:

> A experiência de Newton, com o recipiente de água girando nos informa simplesmente que a rotação relativa da água em relação aos lados do recipiente não produz forças centrífugas perceptíveis, mas que tais forças são produzidas por sua rotação relativa em relação a massa da Terra e dos outros corpos celestes. Ninguém é competente para dizer qual seria o resultado da experiência se os lados do recipiente aumentassem em espessura e massa até que eles tivessem finalmente uma espessura de várias léguas. Uma única experiência está diante de nós e nossa função é fazê-la concordar com os outros fatos conhecidos por nós e não com as ficções de nossa imaginação.

O aspecto mais importante a ser enfatizado aqui é que isto não é apenas uma questão de linguagem. Isto é, ao invés do espaço absoluto de Newton poderíamos falar do sistema das estrelas fixas de Mach e então tudo estaria resolvido. Este seria o caso se tudo não passasse de uma questão de linguagem. Mas as citações indicadas anteriormente apontam um significado mais forte. Elas sugerem, na verdade, uma origem dinâmica para a força centrífuga de acordo com Mach. Isto é, a força centrífuga seria uma força real que só apareceria num sistema

de referência em relação ao qual o céu de estrelas fixas estivesse girando. Este aspecto ou esta interpretação não pode ser derivado das leis do movimento de Newton nem de sua lei da gravitação universal. Vamos enfatizar uma destas citações de Mach mais uma vez: "Tente fixar o balde de Newton e girar o céu das estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas."

A experiência de Newton está representada na Figura 6.3.

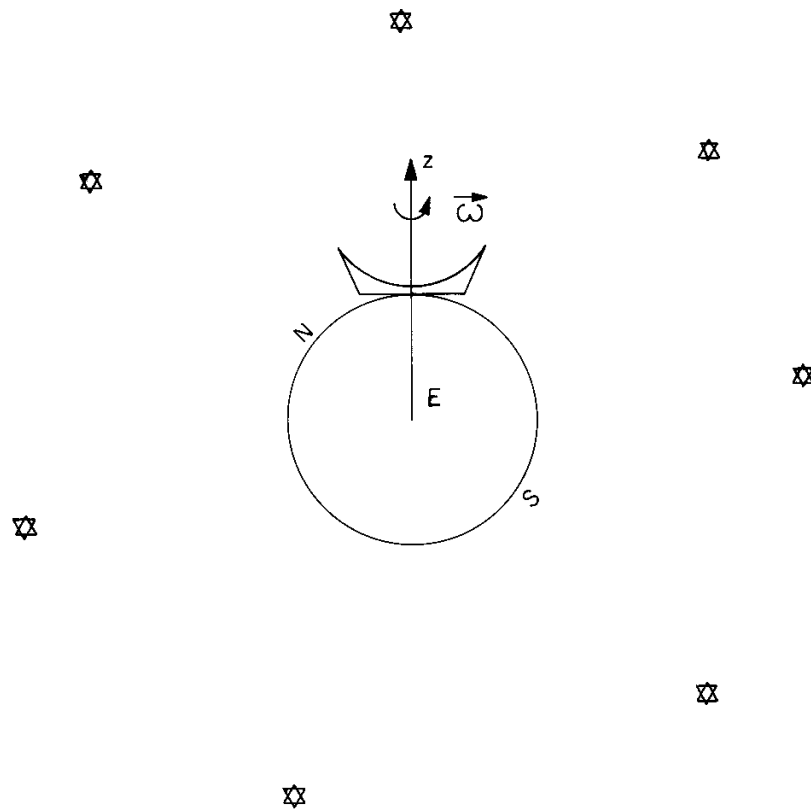



Figura 6.3: Experiência do balde de Newton.

Isto é, o balde e a água estão girando juntos com uma velocidade angular $\omega\hat{z}$ em relação à Terra e às estrelas fixas. A superfície da água é côncava. Escolhemos o eixo z ao longo do eixo de simetria do balde, que não precisa estar alinhado com o eixo Norte-Sul da Terra.

A rotação do balde e da água em relação à Terra é muito maior do que a rotação diurna da Terra em relação às estrelas fixas. Podemos então considerar a Terra como estando essencialmente sem rotação em relação ao referencial das estrelas fixas nesta experiência.

Podemos distinguir claramente entre os pontos de vista de Newton e de Mach com as Figuras 6.4 e 6.5.

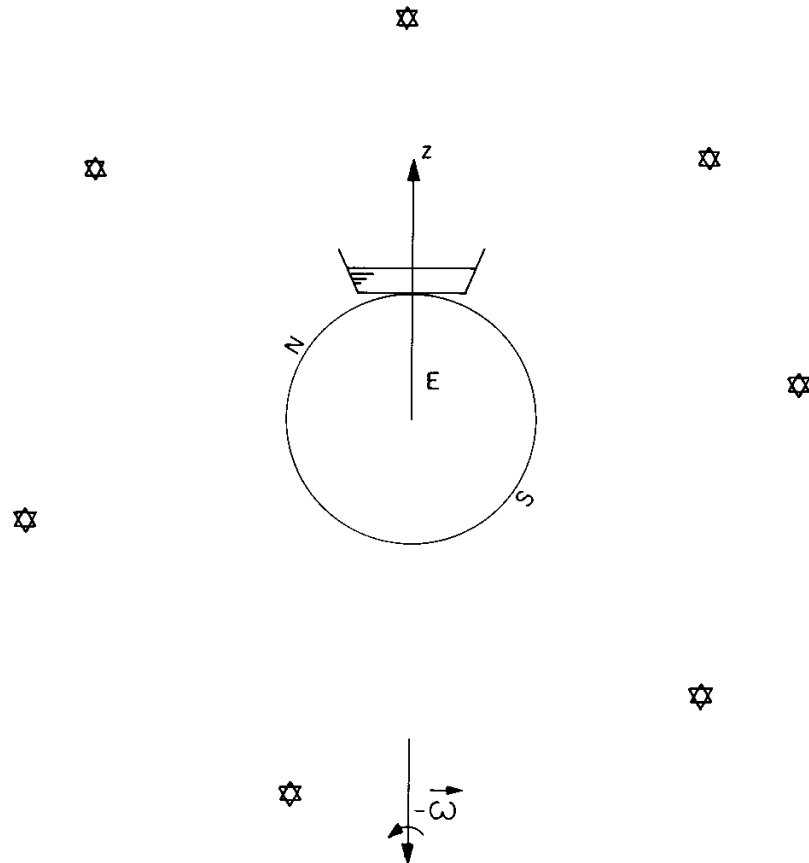



Figura 6.4: O que se pode esperar acontecer de acordo com Newton se fixamos o balde em relação à Terra e giramos o céu de estrelas fixas.

Supomos aqui na Figura 6.4 que o balde, a água e a Terra estão em repouso em relação ao espaço absoluto e que o céu de estrelas gira em relação a este referencial ou em relação à Terra com uma velocidade angular $-\omega\hat{z}$. De acordo com a mecânica newtoniana a água vai permanecer plana já que ela está em repouso em relação ao espaço absoluto e o céu de estrelas girando ao redor dela, não exerce força gravitacional resultante sobre suas moléculas.

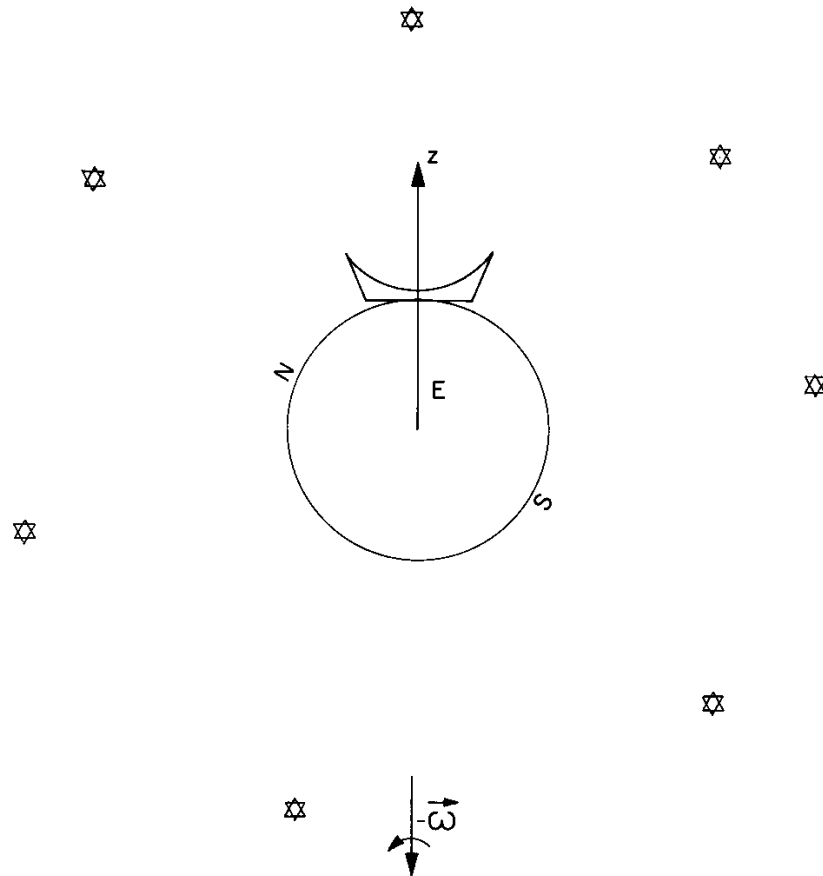



Figura 6.5: O que se pode esperar acontecer de acordo com Mach se fixamos o balde em relação à Terra e giramos o céu de estrelas fixas.

Na Figura 6.5, vemos o que se pode esperar desta experiência mental de acordo com Mach. Isto é, desde que a rotação relativa seja a mesma que na experiência original e real de Newton (girar o balde em relação à Terra e às estrelas fixas com $+\omega\hat{z}$), a superfície da água deve permanecer côncava. Para Mach, o espaço absoluto não existe e, portanto, não pode exercer qualquer efeito aqui. Somente a rotação relativa entre a água e as estrelas fixas deve importar.

Concordamos com Mach e não com Newton, em relação ao que iria ocorrer, se esta experiência fosse realizada. Isto é, se a situação cinemática é a mesma (estrelas em repouso em relação a um sistema de referência arbitrário enquanto a água gira com $+\omega\hat{z}$ em relação a ele, ou então a água em repouso em relação a um outro sistema de referência enquanto as estrelas giram com $-\omega\hat{z}$ em relação a ele), então, os efeitos dinâmicos também têm de ser os mesmos (a água tem de subir em direção às paredes do balde nos dois casos). A única coisa que Mach não sabia é que o agente responsável pela concavidade da superfície da água é a rotação da água em relação às galáxias distantes e não em relação às estrelas fixas. Mais tarde explicamos o motivo disto.

Obviamente as situações das Figuras 6.4 e 6.5 não são completamente equivalentes à experiência real de Newton. A equivalência cinemática somente seria completa se a Terra girasse junto com as estrelas fixas com $-\omega\hat{z}$ em relação ao balde e a água. Mas estamos desprezando aqui as forças tangenciais (que estão num plano perpendicular ao eixo de rotação) exercidas pela Terra girante sobre as moléculas da água. Isto é, estamos assumindo que a força exercida pela Terra sobre a água é essencialmente seu peso apontando para baixo, não interessando a rotação da Terra em relação à água.

Mach disse: "Tente fixar o balde de Newton e girar o céu das estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas." A importância principal desta afirmativa foi a de implicar claramente que a força centrífuga tem sua origem na rotação relativa entre os corpos que sentem ou sofrem estas forças e as massas distantes do universo. Muitos físicos foram fortemente influenciados por estas idéias de Mach e, no final, isto levou à mecânica relacional. Neste sentido pode-se dizer que as idéias de Mach foram mais influentes do que as idéias

similares (mas menos desenvolvidas) de Leibniz e de Berkeley.

6.7 O Princípio de Mach

Em nenhuma parte de seus escritos Mach especificou claramente alguma coisa que poderia ser chamada de "princípio de Mach." Apesar disto, suas idéias contra o espaço e tempo absolutos de Newton, a favor de uma física relacional, defendendo a realidade física das forças fictícias, sua suposição de que a experiência do balde de Newton mostra uma conexão entre a curvatura da água e as estrelas fixas, etc. passaram a ser chamadas geralmente de princípio de Mach. Apresentamos aqui como diversos autores se referiram a este princípio, [Ass93b].

O primeiro a usar as expressões "princípio de Mach" e "postulado de Mach" foi M. Schlick em 1915, [Nor95, ver especialmente págs. 10 e 47, nota 2]. Aparentemente ele se referia à proposta geral de Mach para uma relatividade de todo movimento (ou seja, de que não existem movimentos absolutos em relação ao espaço, mas apenas de matéria em relação à matéria). De acordo com Schlick, uma conseqüência desta proposta é que "tem de se assumir que a causa da inércia está numa interação das massas."

A expressão passou a ser amplamente conhecida e utilizada a partir de 1918 com um artigo de Einstein, ver [BP95, págs. 185-186 para uma tradução em inglês da passagem relevante]. Neste artigo ele afirma o seguinte sobre sua teoria da relatividade geral:

> A teoria, como ela aparece para mim agora, apóia-se sobre três pontos de vista principais os quais, contudo, não são de forma alguma independentes um do outro (...):
>
> a) *Princípio da relatividade*: As leis da natureza são meramente afirmações sobre coincidências espaço-temporais; portanto elas somente encontram sua expressão natural em equações geralmente covariantes.
>
> b) *Princípio de equivalência*: A inércia e o peso são idênticos por natureza. Segue-se necessariamente disto e do resultado da teoria especial de relatividade que o 'tensor

fundamental' simétrico $[g_{\mu\nu}]$ determina as propriedades métricas do espaço, o comportamento inercial dos corpos neste espaço, assim como os efeitos gravitacionais. Vamos denotar o espaço descrito pelo tensor fundamental como o ' campo-G'.

c) *Princípio de Mach*[4]: O campo-G é *completamente* determinado pelas massas dos corpos. Como massa e energia são idênticos de acordo com os resultados da teoria especial da relatividade e a energia é descrita formalmente através do tensor de energia simétrico $(T_{\mu\nu})$, isto significa que o campo-G é condicionado e determinado pelo tensor energia da matéria.

A forma como alguns outros autores apresentaram o princípio de Mach é apresentada a seguir:

"Os referenciais inerciais são aqueles que não estão acelerados em relação às 'estrelas fixas', isto é, em relação a uma média definida convenientemente de toda a matéria do universo" [Sci53].

"Se a inércia não é devido ao movimento em relação ao 'espaço absoluto', ela tem de ser devido a matéria ao redor do corpo" [Bro55].

"O 'programa de Mach' significa a intenção de entender todos os efeitos inerciais como sendo causados por interação gravitacional" [Kae58].

"As propriedades inerciais da matéria no ambiente local são derivadas de alguma forma a partir da existência das massas distantes do universo e de suas distribuições espaciais" [Sch64].

"O movimento e conseqüentemente a massa de cada um dos corpos é determinada (causada, produzida) pelos outros corpos no universo" [Bun66].

"A inércia de qualquer corpo é determinada pelas massas do universo e por sua distribuição" [Jam69, pág. 109].

"A massa inercial de um corpo é causada por suas interações com outros corpos no universo" [Rei73].

[4]Até o momento eu [Einstein] não havia distinguido entre os princípios (a) e (c), e isto estava confuso. Escolhi o nome 'princípio de Mach' porque este princípio tem o significado de uma generalização da exigência de Mach de que a inércia deve ser derivada de uma interação dos corpos

"As forças inerciais devem ser geradas inteiramente pelo movimento em relação à matéria" [Rai81].

Como o próprio Mach não deixou explícito um princípio específico mas apenas idéias gerais, usamos neste trabalho estas idéias gerais como sendo o "princípio de Mach."

6.8 O Que Mach Não Mostrou

Apresentamos aqui brevemente alguns aspectos que estão incorporados no princípio de Mach mas que ele não implementou quantitativamente.

Em primeiro lugar, Mach não enfatizou que a inércia de um corpo (sua massa inercial ou suas propriedades inerciais de resistir a acelerações) é devido a uma interação *gravitacional* com os outros corpos no universo. Em princípio, esta ligação entre a inércia de um corpo e os corpos celestes distantes poderia ser devido a qualquer tipo de interação conhecida (elétrica, magnética, elástica, ...) ou mesmo a um novo tipo de interação. Em nenhum lugar ele disse que a inércia de um corpo deveria vir de uma interação *gravitacional* com as estrelas fixas. Os primeiros a sugerir isto parecem ter sido os irmãos Friedlander em 1896, [FF96]. Há uma tradução parcial para o inglês deste trabalho em [FF95, págs. 114-119 e 309-311]. Esta idéia também foi adotada por Höfler em 1900, por W. Hofmann em 1904 (tradução parcial para o inglês em [Hof95]), por Einstein em 1912 (tradução parcial para o inglês de um trecho relevante em [BP95, pág. 180]), por Reissner em 1914-1915 (tradução para o inglês do artigo de 1914 em [Rei95b] e tradução parcial para o inglês do artigo de 1915 em [Rei95a]), por Schrödinger em 1925 ([Sch25], com tradução comentada em português em [XA94] e com tradução para o inglês em [Sch95]) e por muitos outros desde então, ver: [Ass94], Seções 7.6 (Mach's principle) e 7.7 (The Mach-Weber model); e [Nor95]. No Capítulo 11 discutimos em mais detalhes todos estes aspectos.

Ele também não derivou a proporcionalidade entre as massas inercial e gravitacional. Na página 270 de *A Ciência da Mecânica* Mach disse: "O fato de que a *massa* pode ser ser *medida* pelo *peso*, onde a aceleração da gravidade é constante, também pode ser deduzido

de nossa definição de massa." Não concordamos com Mach sobre esta dedução. O fato de que dois corpos de massas diferentes (e/ou composição química diferentes, e/ou formas diferentes etc.) caem para a Terra com a mesma aceleração no vácuo não pode vir da definição de Mach para a massa, mas apenas da experiência. Podemos deixar dois corpos A e B interagir entre si através de uma mola sobre uma mesa sem atrito e determinar a razão de massa entre eles pela definição de Mach, mas disto não se pode concluir que eles vão cair com a mesma aceleração no vácuo. Apenas a experiência indica que este vai ser o caso. Também não há nada na definição de massa de Mach ("A razão de massas de quaisquer dois corpos é o negativo da razão inversa das acelerações mutuamente induzidas destes corpos") que indique uma relação entre massa e peso (ou entre m_i e m_g). Logo, esta afirmação de Mach de que de sua definição vem que podemos medir a massa de um corpo por seu peso nos parece vazia. Newton, neste sentido, foi mais feliz do que Mach e esteve mais de acordo com os fatos ao afirmar que vem *da experiência* (seja de queda livre ou de pêndulos) que podemos medir a massa pelo peso.

Mach deixou claro que a matéria distante como o conjunto das estrelas fixas estabelecem um excelente sistema inercial. Mas ele também não explicou este fato, nem indicou como esta conexão entre as estrelas distantes e os referenciais inerciais determinados localmente poderia surgir. Ele colocou todos pensando na direção correta embora não tenha fornecido a chave para desvendar o mistério.

Um outro ponto é que ele não mostrou como o céu de estrelas fixas pode gerar as forças centrífugas ao girar. O mesmo pode ser dito de Leibniz, Berkeley e todos os outros. Isto é, Mach sugeriu que a natureza deve se comportar desta maneira, mas ele não propôs uma lei de força específica que tivesse esta propriedade. Com a lei de Newton da gravitação, uma casca esférica não exerce forças sobre corpos internos, quer a casca esteja em repouso ou girando, não importando a posição ou movimento dos corpos internos. Veremos que isto é implementado com uma lei de Weber para a gravitação.

A época já era madura durante a vida de Mach para uma implementação da mecânica relacional. A ciência física e em particular o eletromagnetismo estavam altamente desenvolvidos durante a se-

gunda metade do século passado. A força relacional de Weber para o eletromagnetismo apareceu em 1846. Uma força similar foi aplicada para a gravitação na década de 1870. Ao mesmo tempo Mach estava publicando suas críticas sobre a mecânica newtoniana e propondo sua nova formulação. Infelizmente ele não parece ter ficado ciente destes desenvolvimentos no campo do eletromagnetismo. Embora ele tenha trabalhado com muitas áreas da física, incluindo a mecânica, a gravitação, a termodinâmica, a fisiologia, a acústica e a óptica, ele não parece ter trabalhado tão profundamente com o eletromagnetismo. Não conhecemos nenhuma menção dele sobre a força de Ampère entre elementos de corrente ou sobre a eletrodinâmica de Weber, nem mesmo conhecemos qualquer citação de Mach ao nome de Wilhelm Weber. Mas outras pessoas nesta época conheciam a teoria de Weber porém não fizeram a conexão entre as idéias de Mach e o trabalho de Weber. Se qualquer pessoa tivesse a percepção correta naquela época de juntar as duas coisas, a mecânica relacional poderia ter surgido há um século atrás. Todas as idéias, conceitos, leis de força e ferramental matemático estavam disponíveis durante a segunda metade do século passado para implementá-la. Mas isto simplesmente não aconteceu, como mostra a história. A mecânica relacional só foi descoberta muitos anos depois.

Antes de entrar na nova visão de mundo fornecida pela mecânica relacional, apresentamos as teorias da relatividade de Einstein e os problemas que elas trouxeram para a física.

Capítulo 7

Teorias da Relatividade de Einstein

7.1 Introdução

Albert Einstein (1879-1955) publicou sua teoria especial da relatividade em 1905, enquanto que a versão final da teoria da relatividade geral foi publicada em 1916. Ao desenvolver estas teorias ele foi fortemente influenciado pelo livro de Mach *A Ciência da Mecânica*, [Pai82], páginas 282-288. Em suas *Notas Autobiográficas* Einstein disse: "Esse livro exerceu em mim uma influência profunda quando era ainda estudante", [Ein82, pág. 29]. Nos últimos 75 anos a física, e a mecânica em particular, passaram a ser dominadas pelas idéias de Einstein, desde que ele ficou famoso após 1919 com a expedição inglesa para determinar o eclipse solar, que aparentemente confirmou suas previsões para o desvio da luz. Desde então a mecânica newtoniana passou a ser considerada apenas como uma aproximação das teorias "corretas" de Einstein.

Defendemos aqui que as teorias de Einstein não implementaram as idéias de Mach e que a Mecânica Relacional é uma teoria melhor do que as de Einstein para descrever os fenômenos observados na natureza.

7.2 Teoria da Relatividade Especial de Einstein

A teoria da relatividade especial de Einstein (também chamada de teoria da relatividade restrita) foi apresentada em seu artigo de 1905 intitulado "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento," que já está traduzido para o português, [Ein78c], de onde tiramos as citações. Ele começa o artigo com os seguintes parágrafos:

> Como é sabido, a Eletrodinâmica de Maxwell - tal como atualmente se concebe - conduz, na sua aplicação a corpos em movimento, a assimetrias que não parecem ser

inerentes aos fenômenos. Consideremos, por exemplo, as ações eletrodinâmicas entre um ímã e um condutor. O fenômeno observável depende aqui unicamente do movimento relativo do condutor e do ímã, ao passo que, segundo a concepção habitual, são nitidamente distintos os casos em que o móvel é um, ou o outro, destes corpos. Assim, se for móvel o ímã e estiver em repouso o condutor, estabelecer-se-á em volta do ímã um campo elétrico com um determinado conteúdo energético, que dará origem a uma corrente elétrica nas regiões onde estiverem colocadas porções do condutor. Mas se é o ímã que está em repouso e o condutor que está em movimento, então, embora não se estabeleça em volta do ímã nenhum campo elétrico, há no entanto uma força eletromotriz que não corresponde a nenhuma energia, mas que dá lugar a correntes elétricas de grandeza e comportamento iguais as que tinham no primeiro caso as produzidas por forças elétricas - desde que, nos dois casos considerados, haja identidade no movimento relativo.

Exemplos deste gênero, assim como o insucesso das experiências feitas para constatar um movimento da Terra em relação ao meio luminífero ("Lichtmedium") levam a suposição de que, tal como na Mecânica, também na Eletrodinâmica os fenômenos não apresentam nenhuma particularidade que possa fazer-se corresponder a idéia de um repouso absoluto. Pelo contrário em todos os sistemas de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica, também são igualmente válidas leis ópticas e eletrodinâmicas da mesma forma - o que, até a primeira ordem de aproximação, já está demonstrado. Vamos erguer a categoria de postulado esta nossa suposição (a cujo conteúdo chamaremos daqui em diante "Princípio da Relatividade"); e, além disso, vamos introduzir o postulado - só aparentemente incompatível com o primeiro - de que a luz, no espaço vazio, se propaga sempre com uma velocidade determinada, independente do estado de movimento

> da fonte luminosa. Estes dois postulados são suficientes para chegar a uma eletrodinâmica de corpos em movimento, simples e livre de contradições, baseada na teoria de Maxwell para corpos em repouso. A introdução de um "éter luminífero" revelar-se-á supérflua, visto que na teoria que vamos desenvolver não necessitaremos de introduzir um "espaço em repouso absoluto", nem de atribuir um vetor velocidade a qualquer ponto do espaço vazio em que tenha lugar um processo eletromagnético.

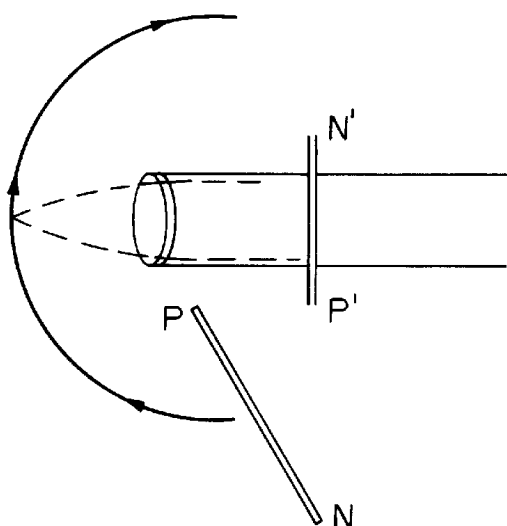
Einstein e seus seguidores criaram muitos problemas com esta teoria. A seguir listamos e analisamos alguns deles em cada Subseção.

7.2.1 Assimetria da Indução Eletromagnética

A assimetria da indução eletromagnética citada no primeiro parágrafo por Einstein não aparece na eletromagnetismo de Maxwell, contrariamente ao que ele afirma. Ela só aparece com uma interpretação específica da formulação de Lorentz para a eletrodinâmica.

Esta assimetria não existia para Faraday (1791-1867), que descobriu o fenômeno. Em 1831 ele obteve que podia induzir uma corrente elétrica num circuito secundário se ele variasse a corrente no circuito primário, mas que enquanto a corrente no circuito primário permanecesse constante nenhuma indução podia ser produzida, [Far52], ver especialmente a Série I, §10. Ele também descobriu que podemos induzir uma corrente no circuito secundário havendo uma corrente constante no circuito primário desde que ele movesse um ou outro em relação ao laboratório, de tal forma a resultar um movimento relativo entre ambos, [Far52], ver, por exemplo, a Série I, §18 e 19. Ele também podia induzir uma corrente no circuito secundário aproximando ou afastando um ímã permanente, ou mantendo o ímã em repouso em relação à Terra e movendo o circuito secundário, ver, por exemplo, §39-43 e 50-54. Para explicar suas observações, Faraday chegou na seguinte lei ([Far52], §114, pág. 281):

> 114. A relação válida entre o pólo magnético, o fio ou metal em movimento e a direção da corrente desenvolvida,

i.e., *a lei* que governa a evolução [o aparecimento] da eletricidade por indução eletromagnética, é muito simples, embora bem difícil de expressar. Se na gravura II, Fig. 12, PN representa um fio horizontal passando por um pólo magnético marcado[5], de tal forma que a direção de seu movimento coincida com a linha curva indo de baixo para cima; ou se seu movimento paralelo a ele mesmo for numa linha tangente à linha curva, mas na direção geral das setas; ou se ele passa pelo pólo em outras direções, de tal forma a cortar as linhas magnéticas[6] na mesma direção, ou no mesmo lado que elas seriam cortadas pelo fio caso se movesse ao longo da linha curva pontilhada - então a corrente de eletricidade no fio é de P para N. Se ele for levado nas direções opostas, a corrente elétrica será de N para P.

[5]Faraday explicou no §44 que "para evitar qualquer confusão em relação aos pólos do ímã, designarei o pólo apontando para o norte por pólo marcado" (...)

[6]Por linhas magnéticas, eu [Faraday] entendo as linhas das forças magnéticas, qualquer que seja a forma como elas são modificadas pela sobreposição de pólos, que seriam descritas por limalha de ferro; ou aquelas linhas em relação as quais uma agulha magnética muito pequena ficaria tangente.

> Ou se o fio está numa posição vertical, representado por $P'N'$ e for levado em direções similares, coincidindo com a curva horizontal pontilhada de forma a cortar as curvas magnéticas sobre o mesmo lado que ele, a corrente será de P' para N'. Se o fio for considerado uma tangente à superfície curva do ímã cilíndrico e for levado ao redor desta superfície para qualquer outra posição, ou se o próprio ímã for girado sobre seu eixo, de tal forma a trazer qualquer parte oposta ao fio tangente - ainda assim, se depois disto o fio for movido na direção indicada, a corrente de eletricidade será de P para N; ou se ele for movido na direção oposta, de N para P; de tal forma que em relação aos movimentos do fio diante do pólo, eles possam ser reduzidos a dois, diretamente opostos um ao outro, um dos quais produz a corrente de P para N e o outro de N para P.

Assim, de acordo com Faraday, a explicação da indução quando aproximamos um circuito a um ímã, ou vice-versa, é baseada na existência real de linhas de força magnéticas e no circuito elétrico cortando estas linhas. Faraday nunca duvidou que estas linhas de força compartilhavam totalmente do movimento translacional do ímã, [Mil81], pág. 155. Ou seja, para Faraday se movemos um ímã (ou um fio com corrente) com uma velocidade linear constante em relação ao laboratório, as linhas do campo magnético (ou linhas de força) também vão se mover com esta mesma velocidade constante em relação ao laboratório, acompanhando o movimento do ímã. No caso de rotação do ímã ele não foi tão explícito, mas como na experiência descrita por Einstein só há movimentos de translação com velocidade constante, não vamos discutir aqui os casos de rotação do ímã.

Maxwell (1831-1879) tinha os mesmos pontos de vista em relação a este assunto e não via nenhuma "nítida distinção" para a explicação das experiências de Faraday não interessando se era o circuito ou o ímã que se moviam em relação ao laboratório. Por exemplo, no §531 de seu livro *Um Tratado sobre a Eletricidade e o Magnetismo*, muitas vezes chamado simplesmente de *Treatise*, ele resumiu as experiências

de Faraday numa única lei (ver [Max54], pág. 179): "O conjunto destes fenômenos pode ser resumido em uma lei. Quando o número das linhas de indução magnética que atravessam um circuito secundário na direção positiva é alterado, uma força eletromotriz age ao redor do circuito, a qual é medida pela razão de diminuição da indução magnética através do circuito." Maxwell afirmou claramente que estas linhas de indução magnética (ou linhas de força) movem-se quando o ímã está em movimento em relação ao laboratório no §541: "A concepção que Faraday tinha da continuidade das linhas de força exclui a possibilidade de elas começarem a existir repentinamente num lugar onde não havia nenhuma [linha de força] antes. Se, portanto, o número de linhas que atravessam um circuito condutor é variado, só pode ser devido ao movimento do circuito através das linhas de força, ou, senão, de outro modo pelas linhas de força movendo-se através do circuito. Em qualquer caso uma corrente é gerada no circuito." Isto é, de acordo com Maxwell a explicação para a indução no circuito secundário é sempre a mesma, dependendo apenas do movimento relativo entre este circuito secundário e as linhas do campo magnético geradas pelo ímã ou pelo circuito primário com corrente.

Esta assimetria apontada por Einstein também não aparece na eletrodinâmica de Weber, embora nesta eletrodinâmica não se utilize o conceito de linhas de força, de linhas de indução magnética ou de linhas do campo magnético $\vec{B}$. A eletrodinâmica de Weber depende apenas das distâncias relativas, velocidades relativas e acelerações relativas entre as cargas interagentes, [Ass94], Cap. 3 e [Ass95b], Cap. 2. Os conceitos de campos elétrico e magnético não precisam ser introduzidos nesta eletrodinâmica. Parece-nos que Einstein não tinha conhecimento da eletrodinâmica de Weber, já que não conhecemos nenhum trabalho de Einstein onde ele a cite ou em que mencione ao menos o nome de Wilhelm Weber. Apesar disto, esta foi a principal teoria eletromagnética na Alemanha durante a maior parte da segunda metade do século passado. Ela também foi discutida em detalhes no último Capítulo do *Treatise* de Maxwell. Parece também que Einstein nunca leu este livro de Maxwell, embora ele tenha sido publicado em 1873 e uma tradução para o alemão tenha aparecido em 1893, [Mil81], págs. 138-139, nota 7.

O fenômeno da indução é sempre interpretado da mesma maneira na eletrodinâmica de Weber, não interessando se é o ímã ou se é o circuito elétrico que estão em repouso em relação ao observador (ou em relação ao laboratório). A única quantidade importante é a velocidade relativa entre o ímã e o circuito elétrico onde está sendo induzida a corrente. A velocidade de qualquer destes corpos (ímã ou circuito elétrico) em relação ao observador (sistema de referência) ou em relação ao laboratório não tem importância na explicação desta experiência dentro da eletrodinâmica de Weber.

Apresentamos aqui os aspectos gerais da explicação desta experiência baseada na eletrodinâmica de Weber. O ímã é representado pelo circuito 1 por onde flui a corrente I_1. Queremos saber a corrente I_2 que será induzida num circuito secundário 2 devido ao movimento de ambos em relação ao laboratório. Consideramos então dois circuitos rígidos 1 e 2 que se movem em relação à Terra com velocidades translacionais $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, respectivamente, sem qualquer rotação em relação à Terra, Figura 7.1.

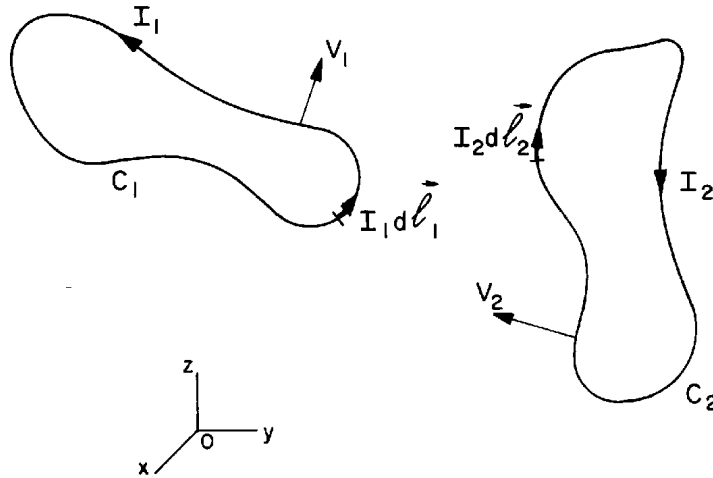



Figura 7.1: Dois circuitos rígidos transladando em relação a Terra.

Se não há baterias ou outras fontes de corrente conectadas ao circuito 2 e se sua resistência elétrica é R_2, então a corrente induzida que fluirá nele devido a indução do primeiro circuito é dada por $I_2 = emf_{12}/R_2$, onde emf_{12} é a força eletromotriz induzida pelo primeiro circuito sobre o segundo. A eletrodinâmica de Weber fornece a d^2emf_{12} infinitesimal exercida por um elemento de corrente neutro $I_1 d\vec{l}_1$ (com cargas dq_{1+} e $dq_{1-} = -dq_{1+}$) localizado em $\vec{r}_1$ atuando sobre um outro elemento de corrente neutro $I_2 d\vec{l}_2$ (com cargas dq_{2+} e $dq_{2-} = -dq_{2+}$) localizado em $\vec{r}_2$ como sendo dada por (ver [Ass94], Seção 5.3 e Figura 7.2):

$$d^2emf_{12} = -\frac{dq_{1+}}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_2}{r_{12}^2c^2}\Big\{2\vec{V}_{12}\cdot(\vec{v}_{1+d}-\vec{v}_{1-d})$$

$$-\ 3(\hat{r}_{12}\cdot\vec{V}_{12})\,[\hat{r}_{12}\cdot(\vec{v}_{1+d}-\vec{v}_{1-d})]+\vec{r}_{12}\cdot(\vec{a}_{1+}-\vec{a}_{1-})\Big\}\ .$$

Figura 7.2: Dois elementos de corrente neutros.

Aqui r_{12} é a distância entre os elementos de corrente, $\hat{r}_{12}$ é o vetor unitário apontando de 2 para 1, $\vec{V}_{12} \equiv \vec{V}_1 - \vec{V}_2$, $\vec{v}_{1+d}$ e $\vec{v}_{1-d}$ são

as velocidades de arraste (*drifting*) das cargas positiva e negativa do elemento de corrente 1 (isto é, suas velocidades em relação ao fio), enquanto que $\vec{a}_{1+}$ e $\vec{a}_{1-}$ são suas acelerações em relação ao referencial terrestre que estamos considerando aqui.

Integrando este resultado sobre os circuitos fechados C_1 e C_2 obtemos a expressão usual da lei de Faraday, a saber (ver [Ass94], Seção 5.3):

$$emf_{12} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[I_1 \oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}}\right]$$

$$= -\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[I_1 \oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}\right] = -\frac{d}{dt}(I_1 M) \ .$$

Aqui M é o coeficiente de indutância mútua entre os circuitos.

Supondo que I_1 é constante no tempo e circuitos rígidos que transladam como um todo sem rodar, com velocidades $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, esta emf pode ser escrita na eletrodinâmica de Weber como:

$$emf_{12} = -I_1 \oint_{C_1}\oint_{C_2} d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2 \frac{d}{dt}\frac{1}{r_{12}}$$

$$= I_1(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)\cdot \oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2)\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \ .$$

Este resultado também pode ser obtido diretamente na eletrodinâmica de Weber utilizando a energia de interação entre os circuitos.

O que é importante perceber é que a expressão obtida com a eletrodinâmica de Weber depende apenas da velocidade relativa entre os circuitos, $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$. Isto mostra que sempre que esta velocidade relativa for a mesma, também será a mesma a corrente induzida. Por exemplo, na primeira situação de Einstein temos o ímã em movimento em relação à Terra ou ao laboratório enquanto que o circuito está em repouso ($\vec{V}_1 = \vec{V}$ e $\vec{V}_2 = 0$). Na segunda situação, temos o ímã em repouso enquanto que o circuito está se movendo na direção oposta em relação à Terra ou ao laboratório ($\vec{V}_1 = 0$ e $\vec{V}_2 = -\vec{V}$). Como

o movimento relativo entre o ímã e o circuito é o mesmo nas duas situações, $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}$, a eletrodinâmica de Weber prevê a mesma corrente induzida e isto é o que é observado.

A diferença entre esta previsão baseada na eletrodinâmica de Weber com a outra baseada na força de Lorentz como utilizada por Einstein é de que não é necessário falar em campos elétrico e magnético. Isto significa que a explicação weberiana é a mesma nos dois casos, sem haver nenhuma "nítida distinção" entre estes casos. Esta distinção só aparece na formulação de Lorentz para a eletrodinâmica de Maxwell. E foi justamente a esta formulação de Lorentz que Einstein estava se referindo, sem talvez perceber isto, quando falou da assimetria na explicação da indução, ver [Mil81], pág. 145. De acordo com Lorentz, quando o ímã está em movimento com uma velocidade $\vec{v}_m$ em relação ao éter, ele gera no éter não apenas um campo magnético mas também um campo elétrico dado por $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}_m$. Este campo elétrico agiria então no circuito que está em repouso em relação ao éter, induzindo nele uma corrente. Se o ímã está em repouso no éter, ele gera apenas um campo magnético $\vec{B}$ e nenhum campo elétrico, de tal forma que quando o circuito está se movendo no éter com uma velocidade $\vec{v}_c$ suas cargas vão sentir ou sofrer uma força magnética dada por $q\vec{v}_c \times \vec{B}$ que induzirá uma corrente no circuito. Se $\vec{v}_m = -\vec{v}_c$ então a corrente induzida será a mesma nos dois casos. Mas de acordo com a formulação de Lorentz a origem desta corrente será completamente diferente nos dois casos. Na primeira situação ela é devido a um campo elétrico e não há força magnética, enquanto que na segunda situação não há campo elétrico e a indução é devido a força magnética. Parece que Einstein estava seguindo a discussão deste fenômeno como apresentada por Föppl em seu livro de 1894, que Einstein estudou durante 1896-1900, [Mil81], págs. 146 e 150-154.

Para Lorentz o que importava eram velocidades em relação ao éter. Ao tornar supérfluo o éter, Einstein tem de passar a usar velocidades em relação ao observador nesta análise. Com isto começa-se a introduzir grandezas que dependem do observador na física. Além do mais, ao enfatizar a visão de Lorentz da eletrodinâmica de Maxwell com todas as assimetrias inerentes a esta formulação (e que como já

vimos não existiam para Faraday, para Maxwell, para Weber e que não estão presentes na observação experimental da indução), Einstein manteve problemas que foram se acumulando no futuro. Tudo isto poderia ser evitado se tivesse optado pelas visões de Faraday, pelas originais de Maxwell, ou pela de Weber. Ou ainda caso houvesse se guiado unicamente pelas experiências de indução, que não sugerem nenhuma assimetria.

Este é um dos pontos fortes a favor da eletrodinâmica de Weber. Há outras experiências que podem ser explicadas facilmente com esta formulação, como é o caso da indução unipolar, [AT94].

7.2.2 Postulado de Relatividade

Einstein chamou de postulado de relatividade a afirmação de que "em todos os sistemas de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica, também são igualmente válidas leis ópticas e eletrodinâmicas da mesma forma." Na página 52 de [Ein78c] ele deu a seguinte definição para o princípio da relatividade: "As leis segundo as quais se modificam os estados dos sistemas físicos são as mesmas, quer sejam referidas a um determinado sistema de coordenadas, quer o sejam a qualquer outro que tenha movimento de translação uniforme em relação ao primeiro." Este é um postulado limitado. O motivo para esta limitação é que em sistemas de referência não inerciais a segunda lei do movimento de Newton na forma da Eq. (1.3) precisa ser modificada pela introdução das "forças fictícias," como vimos no Capítulo 3.

Embora ele tenha chamado a isto de postulado da *relatividade,* este não é de maneira alguma o caso. Afinal de contas ele está mantendo o conceito newtoniano de espaço absoluto desvinculado da matéria distante. Newton foi muito mais preciso, correto e feliz ao introduzir os conceitos de espaço e tempo *absolutos* para explicar suas leis do movimento. Newton também soube distinguir muito claramente as diferenças que surgiriam nos fenômenos, de acordo com ele, quando houvesse apenas uma rotação relativa entre os corpos locais e as estrelas fixas, ou quando houvesse uma rotação absoluta real dos corpos locais em relação ao espaço absoluto (a experiência

do balde, o achatamento da Terra etc.)

Para Newton, o espaço absoluto e os sistemas de referência não acelerados em relação a este espaço formam um conjunto privilegiado de referenciais inerciais, nos quais as leis da mecânica ficam em sua forma mais simples. O postulado da relatividade de Einstein continua a privilegiar este conjunto de referenciais e poderia ser chamado mais apropriadamente de postulato inercial ou absoluto.

7.2.3 Paradoxo dos Gêmeos

Também podemos ver claramente este aspecto absoluto da teoria de Einstein no famoso paradoxo dos gêmeos que aparece na relatividade restrita (mas não na mecânica newtoniana, nem na mecânica relacional apresentada aqui). Para uma discussão deste paradoxo ver [RO89] e [RR89].

Dois gêmeos A e B nascem no mesmo dia na Terra. Alguns anos depois um deles, digamos A, viaja para um planeta distante e retorna à Terra para encontrar-se com seu irmão. De acordo com a relatividade de Einstein o tempo fluiu mais devagar para A do que para B enquanto A estava viajando, de tal forma que quando eles se encontram de novo B está mais velho do que A. Mas do ponto de vista de A, foi B quem viajou para longe e retornou (afinal A não está vendo ele próprio se mover, mas sim B se afastando dele e depois voltando), de tal forma que era B quem deveria ser o mais jovem ao se reencontrarem. Este é o paradoxo dos gêmeos. Para evitar o paradoxo poderíamos dizer que eles sempre mantêm a mesma idade, mas não é esta a previsão da teoria da relatividade de Einstein. De acordo com esta teoria A realmente ficou mais jovem do que B. Só podemos entender isto dizendo que enquanto B ficou em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao espaço absoluto ou a um referencial inercial, o mesmo não aconteceu com A que estava em movimento e de fato sofreu acelerações em relação ao espaço absoluto ou a um referencial inercial. Mais uma vez vemos que apesar do nome *relatividade*, a teoria de Einstein manteve os conceitos absolutos básicos da teoria newtoniana.

Aqui só estamos discutindo os aspectos conceituais da teoria de

Einstein. Afirma-se que esta dilatação do tempo próprio de um corpo em movimento é comprovada por experiências nas quais mésons instáveis são acelerados e movem-se a altas velocidades em aceleradores de partículas. Nestas experiências verifica-se que a meia-vida (tempo de decaimento) destes mésons acelerados e movendo-se a altas velocidades é maior do que a meia-vida de mésons em repouso no laboratório. Acontece que esta não é a única interpretação destas experiências. Pode-se igualmente argumentar que elas apenas mostram que a meia-vida dos mésons instáveis depende de seus movimentos em relação à matéria distante ou então dos fortes campos eletromagnéticos a que estão submetidos. Recentemente Phipps derivou esta explicação alternativa a partir da mecânica relacional, [Phi96].

Uma analogia para esta interpretação é o que ocorre com um relógio de pêndulo comum. Suponhamos dois destes relógios idênticos marcando a mesma hora ao nível do solo. Levamos então um deles para o alto da montanha e o deixamos lá por várias horas, trazendo-o de volta para comparar com o que ficou no mesmo local ao nível do solo. Observa-se que o relógio que foi ao alto da montanha e voltou está atrasado em relação ao que permaneceu no solo. Este é o fato observacional. Pode-se interpretá-lo dizendo que o tempo andou mais devagar para o relógio que ficou no alto da montanha, ou então dizer que o tempo fluiu igualmente para os dois relógios, apenas que o período de oscilação do pêndulo depende do campo gravitacional. Como o campo gravitacional é menor no alto da montanha do que ao nível do mar, o relógio atrasou ao permanecer na montanha comparado ao que permaneceu embaixo. Esta interpretação nos parece mais natural e simples do que a outra que envolve mudanças nos conceitos fundamentais de tempo e espaço, estando mais de acordo com os procedimentos usuais da física. O mesmo pode ser aplicado na experiência dos mésons. Ao invés de afirmar que o tempo anda mais lentamente para o corpo em movimento, nos parece mais simples e de acordo com a experiência afirmar que a meia-vida do méson depende ou dos campos eletromagnéticos a que foi exposto nesta situação ou ao seu movimento (velocidade ou aceleração) em relação ao laboratório e aos corpos distantes do universo.

7.2.4 Constância da Velocidade da Luz

O segundo postulado da relatividade restrita de Einstein introduz uma outra entidade absoluta na mecânica, a velocidade da luz. Ele o definiu na página 48 dizendo: "a luz, no espaço vazio, se propaga sempre com uma velocidade determinada, independente do estado de movimento da fonte luminosa." Na página 52 ele deu a seguinte definição para o princípio da constância da velocidade da luz: "Qualquer raio de luz move-se no sistema de coordenadas 'em repouso' com uma velocidade determinada c, que é a mesma, quer esse raio seja emitido por um corpo em repouso, quer o seja por um corpo em movimento." Com este postulado parece que ele está defendendo a idéia de um éter luminífero, já que a propriedade de algo caminhar com uma velocidade independente do movimento da fonte é característico de ondas caminhando num meio, como é o caso do som. Mas então logo depois da primeira apresentação deste postulado Einstein afirma na página 48 que "a introdução de um 'éter luminífero' revelar-se-á supérflua, visto que na teoria que vamos desenvolver não necessitaremos de introduzir um 'espaço em repouso absoluto'." Diante disto só podemos concluir que para Einstein a velocidade da luz é constante não apenas independentemente do estado de movimento da fonte, mas também independentemente do estado de movimento do receptor ou do observador. Esta conclusão é confirmada pela própria derivação deste "fato" numa outra parte deste artigo (ver as páginas 59-60):

> Temos agora que demonstrar que todo o raio de luz, medido no sistema em movimento, se propaga com a velocidade c, se, como vimos admitindo, assim suceder no sistema em repouso; pois ainda não fornecemos a prova de que o princípio da constância da velocidade da luz é compatível com o princípio da relatividade.
>
> Suponhamos que no instante $t = \tau = 0$, em que as origens das coordenadas dos dois sistemas coincidem, é emitida dessa origem uma onda esférica que se propaga no sistema K com velocidade c.
>
> Se for $(x,\ y,\ z)$ um dos pontos que está sendo atingido

pela onda ter-se-á

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \ .$$

Transformando esta equação por meio das nossas equações de transformação, obtemos depois de um cálculo simples

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2\tau^2 \ .$$

Assim, a onda considerada também é vista no sistema móvel como uma onda esférica de velocidade de propagação c. Deste modo se prova que os nossos dois princípios fundamentais são compatíveis.

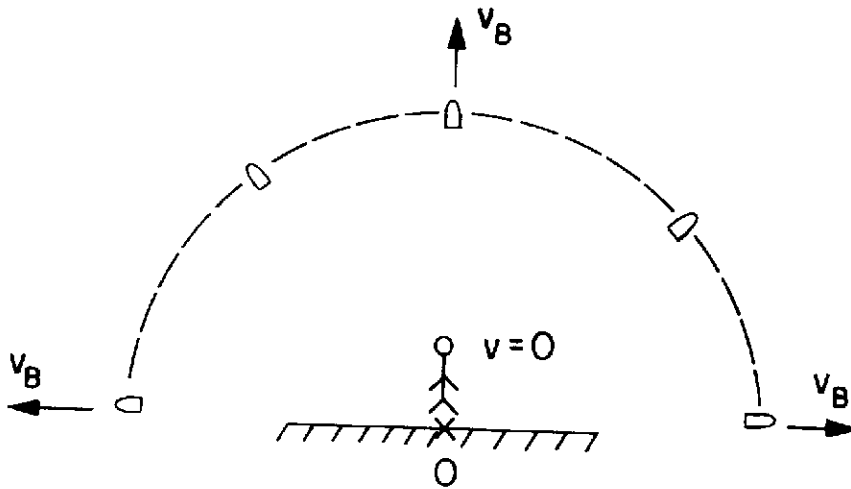



Figura 7.3: Homem atirando em repouso em relação à Terra.

Para nós este é o principal problema da teoria de Einstein. O motivo é o seguinte: São conhecidos dois tipos de fenômeno na física. O primeiro é o balístico. Suponha um canhão em repouso em relação a superfície da Terra que atira balas com uma certa velocidade inicial v_b em relação à Terra, desprezando os efeitos da resistência do

ar. Nesta análise vamos desprezar também o efeito da gravidade, que tornaria as trajetórias das balas parabólicas. Caso o canhão passe a se mover com uma velocidade v_c em relação à Terra e atire uma bala, a velocidade da bala em relação à Terra será $v_b + v_c$, enquanto que a velocidade da bala em relação ao canhão continuará sendo v_b, sempre desprezando os efeitos da resistência do ar. Este comportamento é típico dos efeitos balísticos. Suponha que um homem segure várias armas iguais em repouso em relação à Terra, cada uma delas apontando numa direção. Atirando todas elas ao mesmo tempo gera uma superfície esférica de balas movendo-se com velocidade v_b em relação à Terra, Figura 7.3.

Se agora o homem se mover com velocidade v_c em relação à Terra e atirar todas as armas que ele está segurando ao mesmo tempo, ele ainda verá uma superfície esférica de balas se afastando dele com uma velocidade v_b, mais uma vez desprezando os efeitos da resistência do ar. Seja o referencial em repouso na Terra representado por O com coordenadas $(x,\ y)$ e o referencial do homem em movimento representado por O' com coordenadas $(x',\ y')$. Neste caso a equação representando a superfície esférica de balas centrada no homem em movimento é dada por $x'^2+y'^2 = (v_bt)^2$, onde t é o tempo transcorrido desde os tiros simultâneos. Estando o homem movendo-se para a direita na direção de x crescente com velocidade v_c temos: $x' = x-v_ct$ e $y' = y$, de tal forma que a equação da superfície de balas em relação a um observador que permaneceu em repouso em relação à Terra no local onde o homem atirou as armas é dada por $(x-v_ct)^2+y^2 = (v_bt)^2$. Ou seja, para o observador que permaneceu em repouso em relação a Terra à superfície das balas não mais estará centrada neste observador estacionário a não ser no instante inicial, ver a Figura 7.4, onde todas as velocidades são em relação à Terra. A forma da equação mudou, não sendo dada por $x^2 + y^2 = (v_bt)^2$, embora esta fosse a forma da equação no referencial em movimento. Vemos então que a conclusão de Einstein (de que a forma da equação de onda é invariável) não é válida para efeitos balísticos. Além disto nestes efeitos balísticos a velocidade da bala depende diretamente da velocidade da fonte.

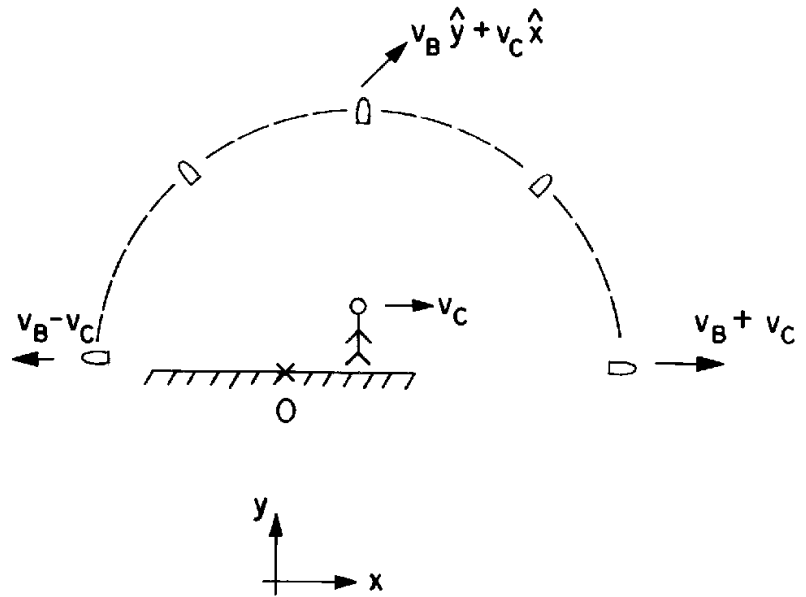



Figura 7.4: Homem atirando em movimento em relação à Terra.

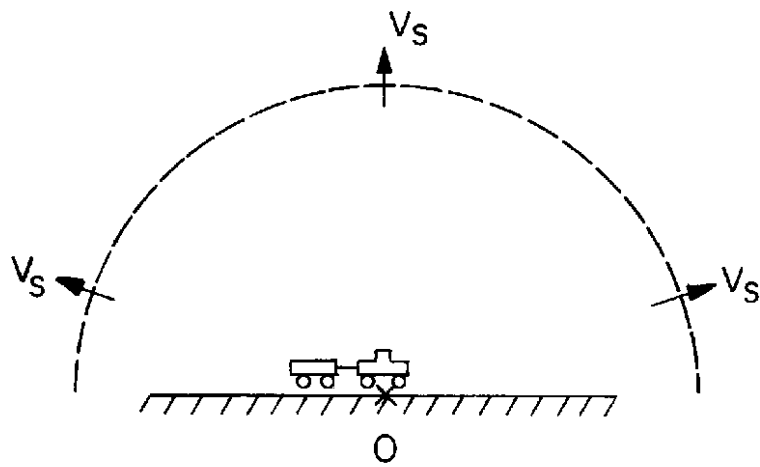



Figura 7.5: Trem apitando em repouso em relação à Terra e ao ar.

O outro tipo de fenômeno conhecido na física é o que depende diretamente do meio. O exemplo mais simples é o da velocidade do som. Neste caso temos um trem em repouso em relação à Terra, emitindo um apito que se move em relação à Terra com a velocidade v_s, supondo o ar em repouso em relação à Terra, Figura 7.5.

Se o trem passar a se mover com uma velocidade v_t em relação à Terra e apitar, o som do apito ainda vai se mover em relação à Terra com velocidade v_s. Mas agora a velocidade do som em relação ao trem será $v_s - v_t$ na direção frontal e $v_s + v_t$ em relação a sua parte traseira, supondo que o ar ainda está em repouso em relação à Terra e que $v_s > v_t$.

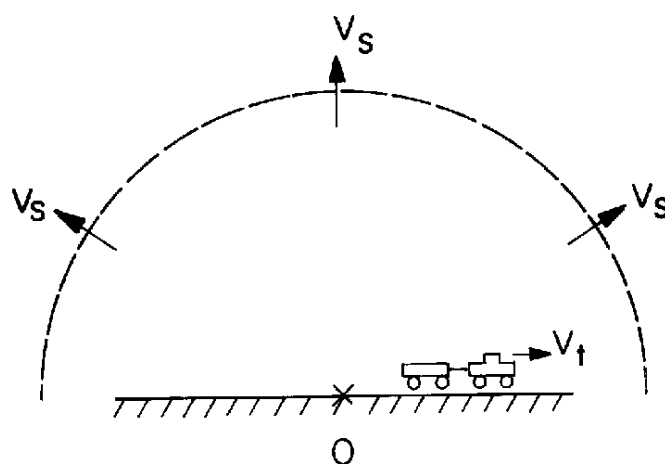



Figura 7.6: Trem apitando movendo-se em relação à Terra e ao ar.

No caso do som, a forma da onda sonora em relação à Terra é sempre esférica a partir do ponto de emissão, tanto para um trem em repouso quanto para um que se move em relação a ela: $x^2 + y^2 = (v_s t)^2$. Já em relação ao trem movendo-se na direção de x crescente com velocidade v_t (referencial O') a equação da onda sonora fica com a forma $(x' + v_t t)^2 + y'^2 = (v_s t)^2$, e não $x'^2 + y'^2 = (v_s t)^2$. Agora a superfície esférica já não é mais centrada no sistema em movimento (o trem), ver a Figura 7.6, onde todas as velocidades são em relação à Terra. A conclusão de Einstein de que a forma da equação de onda

é invariável também não é válida no caso do som, apesar de neste caso a velocidade do som ser independente do estado de movimento da fonte.

No caso balístico, a velocidade das balas é constante em relação à fonte mas é independente da velocidade da arma em relação à Terra e aos outros corpos celestes. Já no caso do trem apitando a velocidade do som é constante em relação ao meio (ar) e não depende da velocidade da fonte. Já a forma da equação da frente de onda muda para diferentes referenciais em ambos os casos.

Além disto, a velocidade da bala ou do som dependem do estado de movimento do observador ou do detector. Vamos considerar um observador ou detector O movendo-se com uma velocidade $\vec{v}_o = -v_o\hat{x}$ em relação à Terra. No caso balístico ele vai encontrar uma velocidade $v_b + v_o$ no primeiro caso (canhão em repouso atirando uma bala com velocidade $+v_b\hat{x}$ em relação a Terra) e $v_b + v_c + v_o$ no segundo caso (canhão movendo-se com velocidade $+v_c\hat{x}$ em relação à Terra, Figuras 7.7 e 7.8, onde todas as velocidades são em relação à Terra.

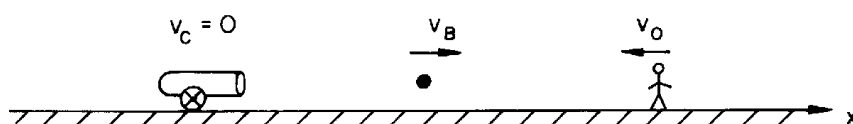



Figura 7.7: Observador ou detector movendo-se em relação à Terra enquanto o canhão está em repouso.

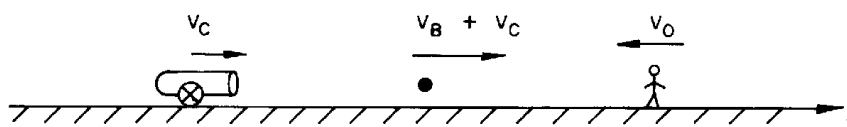



Figura 7.8: Observador e canhão movendo-se em relação à Terra.

Em relação ao som, o observador ou detector encontrará em ambos os casos (trem parado ou em movimento) a velocidade para o som dada por $v_s + v_o$, independente da velocidade do trem em relação à Terra e ao ar, Figuras 7.9 e 7.10, onde todas as velocidades são em relação à Terra e ao ar.

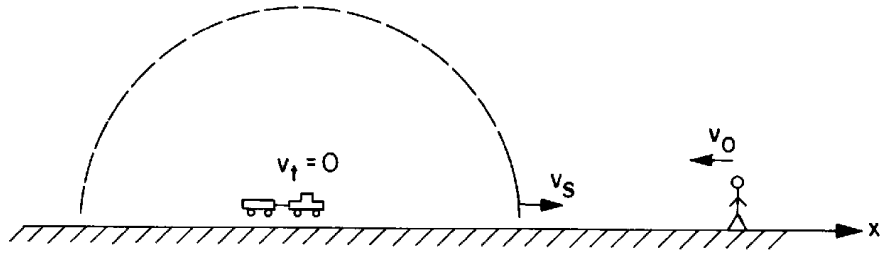



Figura 7.9: Observador movendo-se em relação à Terra e ao ar, enquanto o trem está em repouso.

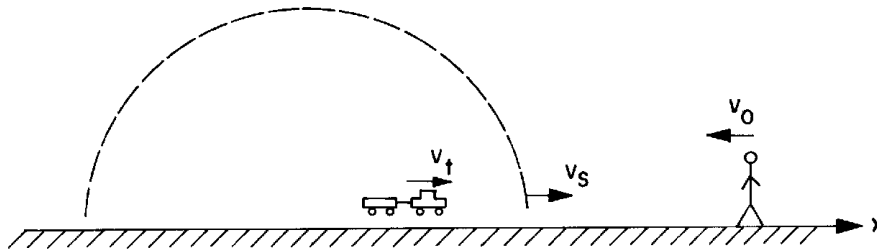



Figura 7.10: Observador e trem movendo-se em relação à Terra e ao ar.

Como vemos aqui, a velocidade das balas ou do som sempre dependem do estado de movimento do observador ou detector. Por outro lado, Einstein conclui que a luz é uma entidade completamente diferente, tal que sua velocidade no vácuo nunca depende da velocidade do observador. Mas a luz é uma entidade física que carrega momento linear e energia, que é afetada pelo meio onde se propaga (reflexão, refração, difração, rotação de Faraday do plano de polarização etc.), que age sobre os corpos aquecendo-os, provocando reações químicas, ionizando átomos etc. Neste sentido ela não tem nada de especial e como tal tem similaridades tanto com corpúsculos quanto com o som. A aceitação desta conclusão de que a velocidade da luz é constante para todos observadores inerciais independente de seus movimentos em relação à fonte, criou problemas e paradoxos inumeráveis na física, nestes últimos 90 anos.

Para provar que a velocidade da luz não depende do movimento do observador, teria de ser necessário fazer experiências de laboratório em que o detector estivesse se movendo a altas velocidades (próximas de c) em relação à Terra e à fonte de luz (suposta em repouso na Terra). Não temos conhecimento de experiências deste tipo que tenham confirmado a conclusão de Einstein.

Wesley, Tolchelnikova-Murri, Hayden, Monti e diversos outros apresentaram argumentos bem fortes e convincentes de que os métodos utilizados por Roemer e por Bradley para obter o valor da velocidade da luz provam que o valor medido desta velocidade depende da velocidade do observador em relação à fonte, ver: [Wes91], Seções 2.2 (Roemer's measurement of the velocity of light) e 2.4 (Bradley aberration to measure velocity of light); [Tol92]; [Hay95]; [Mon96]; etc. O trabalho fundamental de Roemer pode ser encontrado no original em francês em [Coh40] e em [Tat78, págs. 151-154]. A versão em inglês encontra-se em [Roe35] e [Coh40]. Já o de Bradley pode ser encontrado em [Bra29], em [Sar31] e em [Bra35].

Como já vimos, Einstein manteve o conceito newtoniano de espaço absoluto (ou de sistemas inerciais preferenciais) independente da matéria distante e introduziu uma outra quantidade absoluta na teoria, a velocidade da luz. Os trabalhos de Wesley e de Monti, por outro lado, mostram que a velocidade da luz é uma função do estado

de movimento do observador.

7.2.5 Velocidade na Força de Lorentz

Um outro problema criado por Einstein foi sua interpretação da velocidade que aparece na força magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$. Discutimos isto em [AP92], em [Ass94], Apêndice A: "The Origins and Meanings of the Magnetic Force $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$," e em [Ass95b], Apêndice B: "Força magnética" onde todas as referências relevantes podem ser encontradas. Na força de Lorentz $\vec{v}$ é a velocidade da carga q em relação a qual objeto ou entidade? Algumas opções: Em relação à fonte macroscópica do campo (um ímã ou fio com corrente), em relação ao próprio campo magnético, em relação a um sistema de referência inercial ou arbitrário, em relação ao laboratório ou à Terra, em relação ao movimento médio das cargas microscópicas (em geral elétrons) que geram o campo, em relação ao detector de campo magnético etc. Apresentamos aqui as interpretações históricas para esta velocidade.

Maxwell morreu em 1879. Em 1881 J. J. Thomson (1856-1940) chegou teoricamente (pela primeira vez na física) na força magnética dada por $q\vec{v} \times \vec{B}/2$, [Whi73], págs. 306-310. Esta velocidade $\vec{v}$ era, para Thomson, a velocidade da carga q em relação ao meio através do qual ela estava se movendo, meio cuja permeabilidade magnética era μ. Para Thomson esta velocidade $\vec{v}$ não era a velocidade da carga q em relação ao éter luminífero, nem em relação ao ímã ou fio com corrente que gerava o campo magnético $\vec{B}$ e nem mesmo em relação ao observador. Ele chamava esta $\vec{v}$ de velocidade real [*actual velocity*] da partícula de carga q. Na página 248 de seu artigo ele disse: "Deve ser enfatizado que aquilo que por conveniência chamamos de velocidade real da partícula é, na verdade, a velocidade da partícula em relação ao meio através do qual ela está se movendo" (...), "meio cuja permeabilidade magnética é μ", [Tho81]. Em 1889 (1850-1925) Heaviside chegou teoricamente a $q\vec{v} \times \vec{B}$ (isto é, duas vezes maior que o valor de Thomson) e aceitou a interpretação de Thomson para a velocidade $\vec{v}$. O título de seu artigo é "Sobre os efeitos eletromagnéticos devido ao movimento da eletrificação através de um dielétrico,"

[Hea89]. Este título mostra que para ele esta velocidade $\vec{v}$ era a velocidade da carga q em relação a este meio dielétrico em relação ao qual ela estava se movendo. H. A. Lorentz (1853-1928) apresentou sua famosa lei de força $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ pela primeira vez em 1895. Não temos conhecimento de nenhuma experiência que ele tenha feito para chegar nesta expressão. Quais foram suas motivações ou seu caminho para chegar a ela? Para responder a isto citamos um trecho de seu famoso livro *The Theory of Electrons*. Entre colchetes vão nossas palavras e a apresentação moderna de algumas de suas fórmulas (por exemplo, $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]$ é em geral representado hoje em dia por $\vec{a} \times \vec{b}$). Ele usava o sistema cgs de unidades e o que chamava de "elétron" representa uma carga elétrica qualquer (a partícula que chamamos hoje em dia de elétron, com carga $q = -1,6 \times 10^{-19}$ C e massa $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg só foi descoberta em 1897):

> De qualquer forma temos certamente de falar em tal coisa como a força agindo sobre uma carga, ou sobre um elétron, sobre a matéria carregada, qualquer que seja a denominação que você prefira. Agora, de acordo com os princípios gerais da teoria de Maxwell, vamos considerar esta força como causada pelo estado do éter e mesmo, como este meio penetra os elétrons, como exercida pelo éter sobre todos os pontos internos destas partículas onde há uma carga. Se dividimos todo o elétron em elementos de volume, haverá uma força agindo sobre cada elemento e determinada pelo estado do éter existindo dentro dele. Vamos supor que esta força é proporcional à carga do elemento, de tal forma que só queremos saber a força atuando por unidade de carga. É a isto que agora podemos chamar apropriadamente de *força elétrica*. A representaremos por **f**. A fórmula pela qual ela é determinada e que é uma que ainda temos de adicionar a (17)-(20) [equações de Maxwell], é dada por:

$$\mathbf{f} = \mathbf{d} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]. \qquad \left[\vec{f} = \vec{d} + \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{c}\right] . \tag{23}$$

Como as nossas equações anteriores, ela é obtida generalizando os resultados de experiências eletromagnéticas. O primeiro termo representa a força agindo sobre um elétron em um campo eletrostático; na verdade, neste caso, a força por unidade de carga tem de ser completamente determinada pelo deslocamento elétrico. Por outro lado, a parte da força representada pelo segundo termo pode ser derivada a partir da lei de acordo com a qual um elemento de um fio carregando uma corrente sofre a ação de um campo magnético com uma força perpendicular a ele mesmo e as linhas de força, ação esta que nas nossas unidades pode ser representada na notação vetorial por

$$\mathbf{F} = \frac{s}{c}[\mathbf{i} \cdot \mathbf{h}], \qquad \left[\vec{F} = \frac{id\vec{l} \times \vec{h}}{c}\right],$$

onde **i** é a intensidade da corrente considerada como um vetor e s o comprimento do elemento. De acordo com a teoria dos elétrons, **F** é composta de todas as forças com as quais o campo **h** age sobre os elétrons separados movendo-se no fio. Agora, simplificando a questão ao assumir apenas um tipo de elétrons em movimento com cargas iguais e e uma velocidade comum **v**, podemos escrever

$$s\mathbf{i} = Ne\mathbf{v},$$

se N é o número total destas partículas no elemento s. Portanto

$$\mathbf{F} = \frac{Ne}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}], \qquad \left[\vec{F} = \frac{Ne\vec{v} \times \vec{h}}{c}\right],$$

de tal forma que, dividindo por Ne, obtemos a força por unidade de carga

$$\frac{1}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]. \qquad \left[\frac{\vec{v} \times \vec{h}}{c}\right].$$

> Como uma aplicação interessante e simples deste resultado, posso mencionar a explicação que ele permite da corrente induzida que é produzida num fio movendo-se através das linhas de força magnéticas. Os dois tipos de elétrons tendo a velocidade **v** do fio, são neste caso forçados em direções opostas que são determinadas por nossa fórmula.
>
> **9.** Após ter sido levados num caso particular a existência da força **d** e num outro a da força $\frac{1}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]$, combinamos agora as duas na forma mostrada na equação (23), indo além do resultado direto das experiências pela suposição de que em geral as duas forças existem simultaneamente. Se, por exemplo, um elétron estivesse se movendo num espaço atravessado por ondas hertzianas, poderíamos calcular a ação deste campo sobre ele utilizando os valores de **d** e **h**, tal como eles são no ponto do campo ocupado pela partícula. [Lor15], págs. 14-15.

Concordamos com O'Rahilly quando ele disse que esta prova da fórmula da força por Lorentz é extremamente insatisfatória e também quando afirmou ([O'R65], pág. 561): "Há duas objeções esmagadoras em relação a esta suposta generalização. (1) Os dois 'casos particulares' aqui 'combinados' são bem incompatíveis. Num caso temos cargas em repouso, no outro as cargas estão em movimento; elas não podem estar ao mesmo tempo estacionárias e em movimento. (2) Experiências com um 'fio carregando uma corrente' dizem respeito a correntes *neutras*, contudo a derivação contradiz esta neutralidade."

Como podemos ver da citação acima ("... força como causada pelo estado do éter e mesmo, como este meio penetra os elétrons, como exercida pelo éter ..."), para Lorentz esta era originalmente a velocidade da carga em relação ao éter e não, por exemplo, em relação ao observador ou sistema de referência. Para ele o éter estava em repouso em relação ao referencial das estrelas fixas, [Pai82], pág. 111. Uma prova conclusiva para esta interpretação pode ser encontrada em um outro trabalho de Lorentz, *Lectures on Theoretical Physics*, [Lor31], Vol. 3, pág. 306 e [O'R65], Vol. 2, pág. 566. Neste trabalho Lorentz afirma que se um fio por onde circula uma corrente elétrica (e

assim gerando um campo magnético) e uma carga externa estão em repouso entre si e em relação ao éter, que então não haverá força magnética sobre a carga. Por outro lado se o fio e a carga estão em repouso entre si mas têm ambos uma velocidade comum $\vec{v}$ de translação em relação ao éter (enquanto que o observador e o laboratório também transladam com esta mesma velocidade $\vec{v}$ em relação ao éter, já que ele dá como exemplo desta velocidade aquela da Terra em relação ao éter), então ele afirma que vai haver uma força magnética sobre a carga teste. Neste exemplo não há movimento relativo entre a carga teste e vários corpos ou entidades tais como: o fio com corrente, o observador, o detector de campo magnético no laboratório, ou a Terra. Só há velocidade da carga teste em relação ao éter. Logo, se há uma força magnética neste caso de acordo com Lorentz, só pode ser porque ele interpretava $\vec{v}$ em $q\vec{v} \times \vec{B}$ como sendo a velocidade da carga teste em relação ao éter.

Einstein modificou tudo isto em seu artigo de 1905 sobre a teoria especial de relatividade. Neste artigo Einstein introduziu que a velocidade $\vec{v}$ na força de Lorentz deve ser interpretada como a velocidade da carga teste em relação ao observador (e não em relação ao dielétrico como defendido por Thomson e Heaviside, nem também em relação ao éter como defendido por Lorentz). Após obter as transformações de Lorentz para as coordenadas e para o tempo (transformações que relacionam as grandezas num sistema inercial com um outro sistema inercial que translada em relação ao primeiro com uma velocidade constante), Einstein obtém estas transformações para os campos elétrico e magnético. Então ele as aplica na força de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ e começa a interpretar a velocidade $\vec{v}$ como sendo a velocidade da carga q em relação ao observador ou sistema de referência inercial. Por exemplo, na página 71 ele apresenta a diferença entre o velho paradigma do eletromagnetismo e o novo baseado em sua teoria da relatividade (entre colchetes vão nossas palavras):

> Para interpretarmos estas equações [transformações de Lorentz para os campos elétricos e magnéticos], consideremos uma carga elétrica pontual que apresente o valor "um" quando é medida no sistema em repouso [sistema de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica

de Newton, isto é, sistema inercial onde não se precisa introduzir as forças fictícias de Coriolis e centrífuga], isto é, uma carga que, estando imóvel no sistema em repouso, exerce a força de 1 dine sobre uma carga igual, colocada a distância de 1 cm dela. De acordo com o princípio da relatividade, a mesma carga elétrica apresentará também o valor "um" se for medida no sistema em movimento. Estando a carga em repouso em relação ao sistema imóvel, o vetor $(X,\ Y,\ Z)$ [este é o vetor da força elétrica, ou seja, o vetor campo elétrico $\vec{E} = (E_x,\ E_y,\ E_z)$] é, por definição, igual a força que atua sobre ela; mas, estando a carga em repouso relativamente ao sistema que se move (pelo menos no instante que se está considerando), então a força que atua sobre ela será igual, se for medida neste sistema móvel, ao vetor $(X',\ Y',\ Z')$. Conseqüentemente, as primeiras três equações acima [para as transformações dos campos entre dois sistemas inerciais diferentes que transladam em relação um ao outro] podem ser traduzidas em enunciados das duas seguintes maneiras:

1. Se um pólo elétrico unidade, puntiforme, se move num campo eletromagnético, exercer-se-á sobre ele, além da força elétrica [$q\vec{E}$], uma força "eletromotriz" [$q\vec{v} \times \vec{B}$] que, desprezando termos em que entram como fatores potências de v/c de grau igual ou superior a 2, é igual ao quociente pela velocidade da luz do produto vetorial formado com a velocidade do pólo unidade com a força magnética [$\vec{B}$]. (Antigo enunciado.)

2. Se um pólo elétrico puntiforme unidade se move num campo eletromagnético, exerce-se sobre ele uma força idêntica a força elétrica que se obtém no ponto ocupado pelo pólo quando se submete o campo a uma transformação de coordenadas, a fim de o referir a um sistema de eixos que esteja imóvel em relação ao referido pólo. (Novo enunciado.)

Isto é, de acordo com Einstein, no enunciado antigo temos $\vec{F} =$

$q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, enquanto que no novo enunciado temos $\vec{F} = q\vec{E}'$, já que agora $\vec{v}' = 0$ (a velocidade da carga em relação ao novo sistema de referência em repouso em relação a ela é obviamente nula, tal que $q\vec{v}' \times \vec{B}' = 0$). Aqui Einstein está introduzindo forças que dependem do sistema de referência (no caso a componente magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$). Isto é, forças cujos valores dependem do estado de movimento entre o corpo teste e o observador. Esta introdução de forças físicas que passam a depender do estado de movimento do observador criou muitos problemas para a interpretação de experiências simples e infelizmente passou a fazer parte de toda a física teórica desde então. Nenhuma experiência sugeria ou obrigava que se fizesse esta nova interpretação. Tudo isto partiu da cabeça de Einstein. Poderia se manter a expressão usual da força magnética com $\vec{v}$ sendo a velocidade em relação ao ímã ou fio com corrente sem que houvesse contradições com qualquer dado experimental.

7.2.6 Experiência de Michelson-Morley

Um outro problema gerado pela relatividade especial de Einstein surge na interpretação da experiência de Michelson-Morley. Nesta experiência famosa procurou-se por figuras de interferência devidos a dois feixes de luz que deveriam depender do movimento da Terra em relação ao éter. Este efeito não foi encontrado com a ordem de grandeza prevista (experiência com precisão de primeira ordem em v/c realizada por Michelson em 1881 e de segunda ordem realizada por Michelson e Morley em 1887, sendo v a suposta velocidade da Terra em relação ao éter, tomada na prática como a velocidade da Terra em relação ao referencial das estrelas fixas).

A interpretação mais direta desta experiência é que não existe nenhum éter e que apenas os movimentos relativos entre a luz, os espelhos, as cargas destes espelhos e a Terra são importantes, não interessando o movimento absoluto (ou em relação ao éter) de nenhum deles. Neste sentido os resultados obtidos por Michelson e Morley concordam completamente com a eletrodinâmica de Weber, já que nesta teoria o éter não desempenha nenhum papel.

Mas Lorentz e Fitzgerald acreditavam no éter. Para explicar o

resultado negativo da experiência com a idéia de um éter que estava em repouso em relação ao céu de estrelas fixas e que não era arrastado pelo movimento da Terra, tiveram de introduzir a idéia de uma contração de comprimento dos corpos rígidos ao transladarem em relação ao éter. Isto é estranho e *ad hoc* mas funciona. Vejamos algumas palavras de Lorentz em seu texto de 1895, parte do qual já está traduzido para o português, [Lor78], nossa ênfase:

> *A Experiência Interferencial de Michelson*
>
> 1. Foi, pela primeira vez, notado por Maxwell - deduz-se com um cálculo muito simples - que o intervalo de tempo que é necessário a um raio de luz para efetuar um percurso de ida e volta entre dois pontos A e B muda de valor logo que esses pontos entrem solidariamente *em movimento, sem arrastarem consigo o éter.* É certo que essa variação de valor é uma quantidade de segunda ordem de grandeza, mas é, no entanto, suficientemente grande para poder ser posta em evidência por um método interferencial sensível.
>
> Tal método foi posto em prática por Michelson no ano de 1881[7]. O seu aparelho era uma espécie de interferômetro com dois braços horizontais, P e Q, de igual comprimento, perpendiculares entre si. Dos dois feixes interferentes, um fazia o percurso de ida e volta ao longo do braço P e o outro ao longo do braço Q. Todo o instrumento, incluindo a fonte luminosa e o dispositivo de observação, podia rodar em volta de um eixo vertical, tomando-se especialmente em consideração as duas posições em que um dos braços, ou P ou Q, tinha, tão aproximadamente quanto possível, a mesma direção que o movimento terrestre. Esperava-se então, com fundamento na teoria de Fresnel, que as franjas de interferência sofressem um deslocamento quando, por rotação, o aparelho passasse de uma daquelas "posições principais" para a outra.
>
> De tal desvio de franjas, que a alteração no tempo de propagação deveria determinar, e a que por brevidade,

[7]Michelson, American Journal of Science (3) 22 (1881), pág. 120.

chamaremos desvio de Maxwell, não se encontrou porém o menor vestígio, e por isso entendeu Michelson poder concluir que o éter não permanece em repouso durante o movimento da Terra, conclusão esta cuja justeza em breve viria a ser contestada. Com efeito, Michelson tinha erroneamente avaliado no dobro do seu verdadeiro valor a alteração das diferenças de fase, que, segundo a teoria, seria de esperar; se este erro for corrigido, chega-se a desvios que podiam ainda ficar encobertos pelos erros de observação.

Michelson retomou mais tarde esta investigação, em colaboração com Morley[8], tendo então melhorado a sensibilidade, obrigando para isso cada feixe luminoso a refletir-se diversas vezes entre vários espelhos. Este artifício equivalia a um alongamento considerável dos braços do primitivo aparelho. Os espelhos tinham pesados suportes de pedra a flutuar em mercúrio para poder rodar facilmente.

Cada feixe de luz tinha agora que efetuar um percurso total de 22 metros, e era de esperar, com a teoria de Fresnel, um desvio de 0,4 na distância entre as franjas de interferência, quando se passasse de uma posição principal para a outra. No entanto, na rotação, só se verificaram desvios não superiores a 0,02 da distância entre as franjas, os quais bem podiam resultar de erros de observação.

Dever-se-á, com base neste resultado, aceitar que o éter toma parte no movimento da Terra e, deste modo, que a teoria da aberração de Stokes é a teoria correta? As dificuldades que esta teoria encontra na explicação da aberração parecem-me demasiado grandes para poder aceitar esta opinião e, pelo contrário, levaram-me a procurar a maneira de remover a contradição entre a teoria de Fresnel e o resultado de Michelson.

Consegui isso com uma hipótese que tinha apresentado

[8] Michelson e Morley, American Journal of Science (3) 34 (1887), pág. 333; Phil. Mag. (5) 24 (1887), pág. 449.

> algum tempo antes[9] e que, como depois vim a saber, também ocorrera a Fitzgerald[10]. No parágrafo seguinte mostrarei em que consiste tal hipótese.
>
> (...)
>
> Daqui resulta que estas mudanças de fase poderão ser compensadas fazendo nas dimensões dos braços modificações que se oponham a elas.
>
> Se admitirmos que o braço colocado segundo a direção do movimento da Terra é mais curto do que o outro, sendo $L.\frac{p^2}{2c^2}$ a diferença de comprimentos, e, ao mesmo tempo, que a translação tem a influência prevista pela teoria de Fresnel, então o resultado da experiência de Michelson fica completamente explicado. Ter-se-ia assim que postular que *o movimento de um corpo sólido através do éter em repouso*, por exemplo o de uma vara de latão, ou o do suporte de pedra utilizada na segunda experiência, tem sobre as suas dimensões uma influência que varia com a orientação do corpo em relação à direção do movimento. (...)
>
> (...) Invertendo um raciocínio que atrás se fez, poder-se-ia dizer agora que o desvio proveniente das variações de comprimento é compensado pelo desvio de Maxwell.

Veio então Einstein e afirmou que "a introdução de um 'éter luminífero' revelar-se-á supérflua." Se este é o caso, então ele deveria ter descartado a idéia de uma contração do comprimento das réguas e dos corpos rígidos. Afinal de contas esta contração só havia sido introduzida para reconciliar o resultado negativo da experiência de Michelson e Morley com o conceito de éter. Se não há éter então não se esperaria nenhuma mudança nas franjas de interferência, como de

[9]Lorentz, Zittingsverslagen der Akad. v. Wet, te Amsterdam, 1892-93, pág. 74.

[10]Como Fitzgerald muito amavelmente me comunicou, ele tinha já, desde há muito tempo, utilizado nas suas lições a sua hipótese. Na literatura só a encontrei mencionada em Lodge, no artigo "Aberration problems" (London Phil. Trans. 184 A [1893], pág. 727).

fato não se encontrou. Mas neste caso não faz sentido introduzir ou manter a contração de comprimentos, caso contrário se esperaria novamente uma mudança nas franjas de interferência só que agora no sentido oposto. Se o éter é supérfluo então obrigatoriamente a contração de comprimentos fica supérflua. Isto foi claramente apontado por O'Rahilly em seu livro excelente, *Electromagnetic Theory - A Critical Examination of Fundamentals*, Vol. 1, Cap. VIII, Seção 1, pág. 259: [O'R65]. Só que Einstein manteve a contração de comprimentos apesar de ter descartado o éter! Com isto mais uma confusão foi introduzida na física.

Há diversos outros problemas com a teoria da relatividade especial como sua dificuldade para explicar as experiências de Sagnac e de Michelson-Gale, [Hay95] e [Mon96]; o argumento de Einstein sobre o disco em rotação, [CR82]; as observações do efeito Doppler para Vênus parecem contradizer a relatividade especial, [Tol93]; soluções superluminais das equações de Maxwell levam a problemas com o princípio de relatividade, [RL97]; etc. Não entraremos em maiores detalhes aqui.

Analisamos em seguida sua teoria da relatividade geral.

7.3 Teoria da Relatividade Geral de Einstein

A teoria da relatividade geral de Einstein foi apresentada de forma completa em seu trabalho de 1916 intitulado "Os fundamentos da teoria da relatividade geral," que já está traduzido para o português, [Ein78b], de onde tiramos as citações. Apresentamos aqui diversos problemas com esta teoria, como já havíamos feito com a relatividade restrita.

7.3.1 Grandezas Relacionais

Einstein inicia seu artigo com o seguinte parágrafo:

> A teoria da relatividade especial assenta no seguinte postulado, ao qual satisfaz também a mecânica de Galileu-Newton: se um sistema de coordenadas K for de tal maneira escolhido que as leis da física sejam nele válidas na

> sua forma mais simples, então as *mesmas* leis serão igualmente válidas em relação a qualquer outro sistema de coordenadas K' que em relação a K esteja animado de um movimento de translação uniforme. Chamaremos a este postulado o "Princípio da Relatividade Especial". Com a palavra "especial" deve entender-se que o princípio se restringe ao caso em que K' tem um *movimento de translação uniforme* em relação a K, não devendo portanto a equivalência de K e K' estender-se ao caso em que haja movimento *não uniforme* de K' em relação a K.

Na teoria da relatividade geral Einstein tentou generalizar sua teoria da relatividade especial de tal forma que "as leis da física devem ter uma estrutura tal que a sua validade permaneça em sistemas de referência animados de qualquer movimento" (suas palavras) e não apenas para os referenciais inerciais, ver especialmente a pág. 144 de seu trabalho. Teve Einstein sucesso em sua tentativa? Achamos que não. Talvez um dos motivos tenha sido o caminho escolhido por ele para implementar suas idéias.

De acordo com Barbour, [Bar89], pág. 6:

> O próprio Einstein comentou[11] que a maneira mais simples de realizar o objetivo da teoria da relatividade seria formular as leis do movimento diretamente e desde o início apenas em termos das distâncias relativas e velocidades relativas - nada mais devendo aparecer na teoria. Ele apontou a impraticabilidade desta rota como o motivo para *não* escolhê-la. De acordo com ele, a história da ciência tinha demonstrado a impossibilidade prática de dispensar com os sistemas de coordenadas.

Aqui vão as palavras relevantes de Einstein neste trecho citado por Barbour (há uma tradução para o inglês deste trecho em [BP95, pág. 186]):

---

[11] A. Einstein, *Naturwissenschaften*, 6-er Jahrgang, No. 48, 697 (1918) (passagem na pág. 699).

> Queremos distinguir mais claramente entre as quantidades que pertencem a um sistema físico como tal (que são independentes da escolha do sistema de coordenadas) e as quantidades que dependem do sistema de coordenadas. Nossa reação inicial seria requerer que a física devesse introduzir em suas leis apenas grandezas do primeiro tipo. Contudo, se encontrou que este enfoque não pode ser realizado na prática, como já mostrou claramente o desenvolvimento da mecânica clássica. Poderíamos, por exemplo, pensar - e isto já foi tentado de fato [de acordo com Julian Barbour, Einstein estaria se referindo aqui presumivelmente aos trabalhos de Hofmann e de Reissner] - em introduzir nas leis da mecânica clássica apenas as distâncias dos pontos materiais uns aos outros ao invés das coordenadas; *a priori* poderíamos esperar que desta maneira o objetivo da teoria da relatividade seria obtido mais prontamente. Contudo, o desenvolvimento científico não confirmou esta conjectura. Ele não pode dispensar com os sistemas de coordenadas e, portanto, tem de usar coordenadas de quantidades que não podem ser consideradas como o resultado de medidas definíveis.

Como veremos neste livro, é possível seguir esta rota com sucesso utilizando uma lei de Weber para a gravitação. Einstein errou ao afirmar que este caminho é impraticável. Weber tinha introduzido sua força relacional em 1846, 70 anos antes desta afirmação de Einstein. Neste livro mostramos que com uma lei de Weber aplicada para a gravitação (como sugerido por diversas pessoas desde a década de 1870) implementamos quantitativamente todas as idéias de Mach. Ou seja, mostramos que ao girar o universo distante forças centrífugas e de Coriolis vão passar a existir, implementamos uma mecânica sem os conceitos de espaço e tempo absolutos, e também sem quantidades que dependem apenas das coordenadas, os referenciais inerciais passam a ser relacionados com o universo distante, a dinâmica fica equivalente a cinemática e até a energia cinética passa a ser vista como uma energia de interação.

7.3.2 Invariância da Forma das Equações

Em outra parte de seu artigo Einstein explicou o que ele entendia pela afirmação de que "as leis da física devem ter uma estrutura tal que a sua validade permaneça em sistemas de referência animados de qualquer movimento." O significado desta afirmativa foi clarificado quando ele disse (ver a página 149): "As leis gerais da natureza devem ser representadas por equações que tenham validade em todos os sistemas de coordenadas, isto é, que sejam covariantes em relação a toda e qualquer substituição (covariância geral)." O termo covariante havia sido introduzido por Minkowski em 1907-1908. Ele se referia a *identidade ou igualdade na forma das equações* em dois sistemas inerciais diferentes como "covarariância," [Mil81], págs. 14, 240-241 e 288. Isto é, por leis da mesma *natureza* ou da mesma *estrutura* Einstein queria dizer leis da mesma *forma.* Mas sabe-se que isto não é verdadeiro em sistemas de referência não-inerciais. Por exemplo, num sistema de referência inercial O temos a segunda lei do movimento de Newton na forma $\vec{F} = m_i\vec{a}$. Já num sistema de referência não-inercial O' que gira em relação a O com uma velocidade angular constante $\vec{\omega}$ esta lei fica na forma $\vec{F} = m_i(\vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}')$. E isto funciona perfeitamente bem, como vimos no Capítulo 3. Isto significa que a afirmação de Einstein de que as leis da física devem ter a mesma forma em todos os referenciais só vai gerar confusões e ambiguidades. Teremos de modificar muitos conceitos de espaço, de tempo, de medida etc. para que esta teoria possa prever corretamente os fatos em sistemas de referência acelerados. Teria sido muito mais simples e coerente com o conhecimento anterior das leis da física impor ou requerer que toda força entre um par de corpos tenha sempre o mesmo valor numérico (embora não necessariamente a mesma forma) em todos os sistemas de referência. Até mesmo as forças inerciais de Newton têm esta propriedade. Por exemplo, o valor $m_i\vec{a}$ no sistema inercial O acima é exatamente igual em módulo, direção e sentido ao valor $m_i(\vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}')$ no sistema não-inercial O', embora a forma seja completamente diferente nos dois casos. Isto é implementado na mecânica relacional.

7.3.3 Implementação das Idéias de Mach

Há muitos outros problemas com a teoria da relatividade geral de Einstein. Em particular, embora Einstein tivesse tentado implementar com esta teoria o princípio de Mach, ele não conseguiu seu objetivo como ele próprio admitiu. Num livro publicado originalmente em 1922, *O Significado da Relatividade*, Einstein apresentou três conseqüências que têm de ser obtidas em qualquer teoria que implemente o princípio de Mach. Este livro já se encontra totalmente traduzido para o português, [Ein58], de onde tiramos as citações. As três conseqüências apontadas por Einstein são, [Ein58, pág. 123]:

> Que é que poderá esperar-se do desenvolvimento do pensamento de Mach?
>
> 1.º A inércia de um corpo deve aumentar se se acumulam na sua vizinhança massas ponderáveis.
>
> 2.º Um corpo deve sofrer uma força aceleradora quando massas vizinhas são aceleradas; a força deve ser do mesmo sentido que a aceleração.
>
> 3.º Um corpo oco animado de um movimento de rotação deve produzir no seu interior um 'campo de Coriolis' que faz com que corpos em movimento sejam desviados no sentido da rotação; deve ainda produzir um campo de forças centrífugas radial.
>
> Vamos mostrar que, segundo a nossa teoria, estes três efeitos previstos por Mach devem realmente manifestar-se, se bem que numa medida de tal maneira mínima que não se põe a questão de os demonstrar por experiências de laboratório.

Uma quarta conseqüência que se deve esperar de qualquer teoria incorporando o princípio de Mach de acordo com Einstein é: "4. Um corpo num universo vazio não deve ter inércia," [Rei73]. Relacionado com isto está a afirmativa de que: "4'. *Toda* a inércia de qualquer corpo tem de vir de sua interação com outras massas no universo." Uma afirmação de Einstein corroborando que ele dava

esta interpretação para a origem da inércia se encontra em seu artigo de 1917, também já traduzido para o português, intitulado "Considerações cosmológicas sobre a teoria da relatividade geral," onde afirma ([Ein78a], trecho na pág. 229): "Numa teoria da relatividade conseqüente não pode existir inércia *em relação ao "espaço"*, mas somente inércia das massas *em relação umas as outras.* Portanto, se eu colocar uma massa a uma distância espacial suficientemente grande de todas as outras massas do Universo, a sua inércia deverá desvanecer-se." Uma afirmação análoga se encontra na pág. 126 de [Ein58], nossa ênfase em negrito: "Se bem que todos estes efeitos sejam inacessíveis à experiência, em virtude do pequeno valor de k, não pode duvidar-se da sua existência como o exige a teoria da relatividade geral. É preciso ver nisso um apoio sólido da concepção de Mach da **relatividade de todos os efeitos da inércia. Se se leva esta idéia até ao fim, deverá compreender-se que toda a inércia, isto é, todo o campo $g_{\mu\nu}$, seja determinado pela matéria do universo**, e não por condições de limite, no infinito."

Embora Einstein pensasse inicialmente que estas conseqüências podiam ser obtidas de sua teoria da relatividade geral, ele logo percebeu que este não era o caso. Para uma análise detalhada mostrando que a relatividade geral não implementa o princípio de Mach e para as referências originais, ver: [Sci53], [Rei73], [Rai81] e [Pai82], págs. 282-8.

A primeira conseqüência não aparece na relatividade geral, [Rei73] e [Pfi95]. Isto é, não há efeitos observáveis no laboratório devidos a uma aglomeração simetricamente esférica de matéria em repouso ao redor dele. Isto significa que a inércia de um corpo não é aumentada na relatividade geral com a aglomeração de massas ao redor dele. Einstein chegou inicialmente na conclusão errada de que a relatividade geral previa este efeito baseado numa interpretação de um cálculo feito num sistema de coordenadas particular, como foi apontado por Brans em 1962, [Bra62b], [Bra62a], [Rei73] e [Pfi95].

A segunda conseqüência acontece na relatividade geral, mas sua interpretação não é única, [Rei73].

A terceira conseqüência aparece na relatividade geral, como foi obtido por Thirring (1888-1976) em 1918-1921, [Thi18] e [Thi21]. Há

uma tradução para o inglês destes trabalhos básicos de Thirring e de um outro de Lense e Thirring em [MHT84]. Contudo, os termos obtidos na relatividade geral não são exatamente como deviam ser. Trabalhando na aproximação de campo fraco Thirring mostrou que uma casca esférica de massa M, raio R, girando com uma velocidade angular constante $\vec{\omega}$ em relação a um certo referencial O exerce uma força $\vec{F}$ sobre uma partícula teste interna de massa m, localizada em $\vec{r}$ em relação ao centro da casca e movendo-se no referencial O com uma velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$, dada por ([Thi21], [PR94] e [Pfi95]):

$$\vec{F} = -\frac{8GMm(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}}{15Rc^2} - \frac{4GMm\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}{15Rc^2} - \frac{4GMm(2\vec{v}\times\vec{\omega})}{3Rc^2} . \quad (7.1)$$

Há um termo axial $(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}$ nesta equação que não tem equivalente na mecânica newtoniana. Isto é, não há nenhuma "força fictícia" que se comporta como ele. Além do mais, os coeficientes 4/15 do termo centrífugo $m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ e 4/3 do termo de Coriolis $2m\vec{v}\times\vec{\omega}$ são diferentes um do outro, enquanto que na força fictícia newtoniana $\vec{F}_f$ estes termos têm coeficientes com o mesmo valor, ver a equação (3.15):

$$F_f = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - m(2\vec{\omega}\times\vec{v})$$

$$- m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} - m\vec{a}_{o'o} .$$

Isto mostra que a teoria da relatividade geral de Einstein não conseguiu derivar simultaneamente as forças centrífuga e de Coriolis, ao contrário do que Einstein almejava. Desenvolvimentos posteriores feitos por Bass, Pirani, Brill, Cohen e muitos outros também não tiveram sucesso neste sentido. Isto é, eles não conseguiram derivar, baseados na relatividade geral, estes dois termos simultaneamente com os coeficientes corretos, como se sabe que eles existem em referenciais não-inerciais da teoria newtoniana e também não conseguiram eliminar o termo espúrio axial (que aponta na direção de $\vec{\omega}$). Para discussões e referências ver: [BP55], [BC66], [CB68], [Rei73], [PR94] e [Pfi95]. Isto mostra que não podemos derivar os resultados corretos

da mecânica clássica em referenciais não inerciais a partir da teoria da relatividade geral de Einstein.

Colocando $\vec{\omega} = 0$ na Eq. (7.1) mostra mais uma vez que a primeira conseqüência apontada acima não ocorre na relatividade geral. Isto é, uma casca esférica estacionária e sem girar não exerce qualquer força sobre uma partícula teste interna, não interessando a posição, velocidade e aceleração da partícula em relação à casca. Isto significa que na relatividade geral, a inércia de um corpo não é aumentada quando colocamos cascas esféricas materiais ao redor dele, ao contrário do que Einstein almejava.

Vale a pena observar aqui que Einstein chegou na terceira conseqüência (que uma casca girando deve gerar forças centrífugas em corpos que estão em seu interior) influenciado pelas idéias de Mach. Como vimos anteriormente na Seção 5.1, Clarke concluiu que as idéias de Leibniz levavam exatamente ao mesmo efeito, mas de trás para a frente. Isto é, se aniquilarmos o conjunto de estrelas (cascas esféricas) que giram ao redor da Terra e do Sol, as forças centrífugas têm de desaparecer (a Terra não seria mais achatada nos pólos etc). Isto mostra quão similares são as idéias de Leibniz e de Mach.

A quarta conseqüência também não ocorre na relatividade geral. Einstein mostrou que suas equações de campo levam à conseqüência de que uma partícula teste num universo vazio tem propriedades inerciais, [Sci53] e [Rei73]. O conceito de massa inercial é tão intrínseco ao corpo e ao espaço na relatividade geral quanto o era na mecânica newtoniana. Einstein não teve sucesso em construir uma teoria onde toda a inércia de um corpo viria de suas interações gravitacionais com outros corpos no universo, tal que se os outros corpos do universo fossem aniquilados ou não existissem, então a inércia deste corpo também desapareceria. Mesmo sua introdução do termo cosmológico na relatividade geral não ajudou, já que de Sitter encontrou em 1917 uma solução para suas equações de campo modificadas na ausência de matéria, [Pai82], pág. 287. Einstein nunca pôde evitar o aparecimento da inércia em relação ao espaço nas suas teorias, embora isto fosse uma exigência do princípio de Mach.

Uma discussão importante mostrando que a teoria da relatividade geral de Einstein ainda mantém o conceito de espaço-tempo absoluto

com existência independente da matéria distante (estrelas e galáxias), não satisfazendo portanto as idéias de Mach, se encontra nos trabalhos de M. Ghins, [Ghi91] e [Ghi92]. Uma outra análise mostrando diversos aspectos em que a relatividade não implementa o princípio de Mach se encontra em [Jam69, págs. 194-199].

Schrödinger apresentou de uma forma clara o fato de que a relatividade geral não implementa o princípio de Mach, [Sch25] e [XA94]. Neste artigo ele afirma: "A teoria da relatividade geral também não satisfaz, em sua forma original, ao postulado de Mach, como logo se viu. Após a derivação do movimento secular do periélio de Mercúrio, que se mostrou em espantosa concordância com a experiência, qualquer pessoa ingênua pode se perguntar: Em relação a que se dá, de acordo com a teoria, o movimento da elipse, o qual, de acordo com a experiência, se dá em relação ao sistema aproximado de estrelas fixas? Tem-se como resposta que a teoria exige tal movimento em relação a um sistema de coordenadas que satisfaz, no infinito, a determinadas condições de fronteira. O vínculo entre estas condições e a presença das estrelas fixas não é, de nenhuma maneira, claro, já que as estrelas não são levadas em conta nos cálculos." Ou seja, como as estrelas não são levadas em conta no cálculo da precessão do periélio dos planetas na relatividade geral, não faz sentido dizer que esta precessão é em relação às estrelas. Por outro lado, as observações dos astrônomos indicam que esta precessão ocorre em relação às estrelas fixas. Isto só pode ser uma coincidência na relatividade geral. Na mecânica relacional, isto deixa de ser uma coincidência. Vai-se mostrar que é o universo distante que gera a força "inercial" $-m\vec{a}$ ou a energia "cinética" $mv^2/2$. Ou seja, o universo distante tem uma influência fundamental sobre os corpos do sistema solar. A precessão calculada com a mecânica relacional é realmente em relação ao universo distante, e não em relação a um referencial abstrato desvinculado da matéria distante.

Tudo isto mostra que mesmo na teoria da relatividade geral de Einstein os conceitos de espaço absoluto ou de sistemas de referência inerciais preferenciais desvinculados da matéria distante ainda estão presentes, o mesmo ocorrendo com a inércia ou com as massas inerciais.

7.4 A Experiência do Balde de Newton

Como a teoria da relatividade geral de Einstein lida com a experiência do balde de Newton? Para analisar isto vamos nos concentrar em duas situações. Na primeira a água e o balde estão em repouso em relação à Terra e na segunda situação ambos estão girando juntos com uma velocidade angular constante ω_b em relação à Terra. Como $\omega_b \gg \omega_e > \omega_s \gg \omega_g$, podemos considerar durante esta experiência a Terra como essencialmente sem rotação em relação ao referencial das estrelas fixas e também em relação ao referencial das galáxias distantes. Aqui $\omega_e \approx 7 \times 10^{-5}\ s^{-1}$ é a rotação diurna da Terra em relação às estrelas fixas, $\omega_s \approx 2 \times 10^{-7}\ s^{-1}$ é a rotação anual da Terra em relação às estrelas fixas e $\omega_g \approx 8 \times 10^{-16}\ s^{-1}$ é a rotação angular do sistema solar ao redor do centro de nossa galáxia em relação ao referencial das galáxias distantes (isto é, a rotação angular de nossa galáxia na posição do sistema solar) com um período de $2,5 \times 10^8$ *anos*.

Como já discutimos antes, a força exercida pelo balde sobre as moléculas de água é a mesma em ambas as situações, já que em ambos os casos o balde está em repouso em relação à água. Logo, na relatividade geral também não é o balde que causa a forma côncava da água. Na relatividade geral a força exercida pela Terra sobre a água na primeira situação é essencialmente o resultado newtoniano do peso da água apontando verticalmente para baixo. E na segunda situação este resultado permanece praticamente o mesmo, já que $v_w \ll c$, onde v_w é a velocidade tangencial de qualquer molécula de água em relação à Terra, isto é, velocidade num plano perpendicular ao eixo de rotação do balde. Isto é, como as velocidades envolvidas neste problema são desprezíveis quando comparadas com a velocidade da luz, as correções relativísticas (que em geral só começam a ser relevantes para velocidades próximas de c) não precisarão ser levadas em conta, ou seja, não serão importantes. Isto significa que também na relatividade geral a rotação da água em relação à Terra não pode ser a responsável pela concavidade da água.

E o que podemos dizer sobre as estrelas fixas e galáxias distantes? Como vimos, Mach acreditava que a resposta do enigma estava na

rotação da água em relação à matéria distante. Mas na relatividade geral não há efeitos observáveis num laboratório devido a aglomerações simetricamente esféricas de matéria em repouso ao redor dele. Isto é, na relatividade geral as estrelas fixas e galáxias distantes não exercem força resultante ou influência sobre qualquer molécula da água na primeira situação já que elas estão distribuídas mais ou menos homogeneamente ao redor da Terra. E na segunda situação como vista da Terra a mesma coisa acontece, já que temos agora a água se movendo em relação aos corpos fixos distantes. Isto significa que as estrelas fixas e galáxias distantes não vão exercer qualquer força do tipo $-m\vec{a}$ sobre as moléculas da água. Ou seja, na relatividade geral a forma côncava da superfície da água, na segunda situação, também não é devido à rotação da água em relação às estrelas fixas e galáxias distantes. Ela só pode ser devido então a rotação da água em relação a alguma coisa imaterial como o espaço absoluto de Newton ou como um sistema de referência inercial que é desvinculado (sem qualquer relação física) da matéria distante no universo. Daqui vemos mais uma vez que a relatividade geral manteve os conceitos newtonianos de espaço e movimento absolutos ou, se preferir, manteve o conceito de referenciais inerciais independentes da matéria distante.

Para enfatizar este ponto suponhamos que estamos em um sistema inercial de referência analisando a rotação conjunta da água com o balde (segunda situação descrita acima). Na prática, sabemos que nos sistemas inerciais o conjunto de galáxias distantes está essencialmente sem aceleração translacional e sem rotação. Este fato é uma simples coincidência tanto na mecânica newtoniana quanto na relatividade geral, pois não há nenhuma relação ou conexão física entre estas duas coisas (referenciais inerciais e galáxias distantes) nestas duas teorias. Para simplificar ainda mais a análise e deixar claro o que queremos dizer, vamos supor que estamos num referencial inercial particular O no qual o conjunto das galáxias distantes está em repouso sem rotação em relação a este referencial. Neste referencial, o balde e a água estão girando juntos e a superfície da água é côncava. Como na relatividade geral não há efeitos observáveis devidos a distribuições esfericamente simétricas de matéria em repouso ao redor do laboratório, podemos dobrar o número e a quantidade de matéria

das galáxias ao redor do balde sem afetar a concavidade da água. Ou então, podemos fazer com que todas as galáxias distantes fossem aniquiladas ou desaparecessem sem causar a menor diferença na forma da superfície da água, pelo menos de acordo com a relatividade geral. Isto está completamente em desacordo com as idéias de Mach, já que de acordo com ele a concavidade da água era devido à sua rotação em relação à matéria distante. Isto significa que, de acordo com as idéias de Mach, se a matéria distante desaparecesse, então a concavidade da água devia desaparecer conjuntamente. Ou, se dobramos a quantidade de matéria distante, a concavidade da água deveria dobrar supondo a mesma rotação relativa de antes. E nada disto acontece na teoria da relatividade geral de Einstein.

Mas a situação fica realmente ruim ao ser analisada no sistema de referência O' que gira junto com o balde e a água na segunda situação. Temos então a água e o balde em repouso em relação a este novo referencial, apesar da concavidade da superfície da água. Na mecânica newtoniana o termo $m_i\vec{a}$ descrevendo o movimento da água e responsável pela sua concavidade no referencial inercial O anterior torna-se nulo neste referencial O', já que a água está agora em repouso. Isto é, como $\vec{a}' = 0$ obtemos $m_i\vec{a}' = 0$. Mas no referencial O' aparece, de acordo com a mecânica newtoniana, uma força centrífuga $m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ agindo sobre a água que tem exatamente o mesmo valor que $m_i\vec{a}$ tinha no referencial anterior. Podemos também dizer que o termo $m_i\vec{a}$ foi transformado na força centrífuga. E esta força centrífuga tem então exatamente o valor correto para deformar a superfície da água o mesmo tanto que no referencial O anterior. Isto significa que a explicação quantitativa da experiência do balde é possível na mecânica newtoniana não apenas no referencial inercial O (utilizando $m_i\vec{a}$), mas também no referencial girante O' utilizando a força centrífuga. Já na teoria da relatividade geral de Einstein acontece algo muito estranho. Embora as estrelas fixas e galáxias distantes não exerçam qualquer força resultante sobre a água no referencial O no qual elas são vistas em repouso, o mesmo não acontece no referencial O' do balde no qual as estrelas e galáxias são vistas girando com uma velocidade angular $\vec{\omega}_{so'}$ dada por: $\vec{\omega}_{so'} = -\vec{\omega}_{bo}$, onde $\vec{\omega}_{bo}$ é a rotação angular do balde e da água em relação a O. Agora, devido a

expressão de Thirring (7.1), vai aparecer uma força gravitacional real exercida pela matéria girante distante sobre a água, força esta que não existia no referencial O. O problema é que esta nova força não é exatamente igual à força centrífuga fictícia newtoniana. Aparecem novos termos como o axial $(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega}$ que não têm análogos na teoria newtoniana, ver a Eq. (7.1).

Vimos, anteriormente, que de acordo com a relatividade geral se estamos num referencial inercial O a concavidade da água será independente da quantidade de matéria distante ao redor do balde. Mas agora estamos vendo que se estamos no referencial O' que gira junto com o balde e com a água, que então de acordo com a relatividade geral a matéria distante vai exercer uma força gravitacional real sobre a água pela expressão de Thirring. Ou seja, neste referencial elas passam a influenciar o movimento da água e a forma de sua superfície. Se dobrarmos a quantidade ou a massa das galáxias, a concavidade da água vai ser alterada concomitantemente!

Isto é uma conseqüência indesejável, já que a situação física é sempre a mesma, apenas vista em referenciais diferentes. Logo, não faz sentido que em um referencial as galáxias não exerçam qualquer influência sobre a água, enquanto que em outro referencial elas passem a ter influência real e em princípio com possíveis conseqüências físicas. Ou seja, no referencial O dobrando ou sumindo com as galáxias não ia alterar a concavidade da água, enquanto que em O', ao analisarmos a mesma experiência de um referencial diferente, isto passa a acontecer, tal que se dobrarmos a quantidade de galáxias a água pode entornar do balde! Na mecânica newtoniana a situação era muito melhor e mais coerente. Isto é, não importando se o conjunto de galáxias distantes (ou casca esférica com matéria) está em repouso ou girando, este conjunto ou esta casca nunca vai exercer qualquer força resultante sobre a água. Podíamos explicar a concavidade da água no referencial inercial O utilizando $m_i\vec{a}$ e também no referencial girante O' utilizando a força centrífuga $m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ (isto é, $m_i\vec{a}$ do referencial O era transformado em $m_i\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ do referencial O'). Mas tanto a força centrífuga quanto $m_i\vec{a}$ não tinham qualquer relação com a matéria distante. Já na relatividade geral passamos a ter uma força gravitacional que depende do sistema de

referência. Isto é, a força gravitacional entre corpos materiais (como entre a água e as galáxias distantes aqui) passa a depender do estado de movimento do observador. Quando as galáxias distantes estão em repouso em relação a O e a água está girando em relação a elas, elas não influenciam a concavidade da superfície da água, tal que mesmo quando elas desaparecem ou dobram em quantidade a superfície da água continua a mesma. Mas quando vemos a mesma situação física no referencial O' girando em relação a O, tal que o balde e a água sejam vistos em repouso em relação a O', então de acordo com a expressão de Thirring vai haver uma influência gravitacional real das galáxias distantes sobre a água. Isto significa que neste referencial O' o grau ou quantidade de concavidade (isto é, se a água vai ou não entornar do balde) passa a ser uma função do número e da massa das galáxias distantes! Este resultado é certamente indesejável em qualquer teoria física.

A mesma coisa vai acontecer na experiência dos dois globos de Newton de acordo com a teoria da relatividade geral de Einstein. Isto é, no referencial das galáxias distantes a tensão na corda é independente do número e massa das galáxias, enquanto que no referencial que gira com os globos a tensão na corda passa a ser uma função da quantidade de galáxias distantes devido a força de Thirring.

Esta discussão simples mostra que a teoria da relatividade geral não se reduz a teoria newtoniana no limite de baixas velocidades. Isto é, no referencial que gira com o balde há uma força sobre a água devido ao universo que gira, de acordo com a relatividade geral, enquanto que de acordo com a teoria newtoniana não há força resultante sobre a água devido ao universo girando. Poderia se pensar que este efeito é desprezível, mas este não é o caso. Quando integramos a expressão de Thirring sobre todo o universo obtemos uma expressão da mesma ordem de grandeza que as forças de Coriolis ou centrífuga da mecânica clássica. Mas a forma e os valores numéricos da expressão de Thirring são diferentes das forças "fictícias" centrífuga e de Coriolis. Mesmo se não pensarmos no universo como um todo pode-se ver que a teoria da relatividade geral não se reduz a teoria newtoniana no limite de baixas velocidades. Suponhamos uma casca esférica de raio 1 metro girando com uma velocidade angular de 1 radiano por segundo em

relação à Terra. Obviamente todas as velocidades tangenciais são baixas aqui. Um ponto material dentro desta casca girando não vai sofrer nenhuma força de acordo com Newton. Já a expressão de Thirring prevê uma força que é função da massa da casca. Mesmo mantendo o raio da casca e sua velocidade angular, pode-se aumentar este efeito aumentando a massa da casca. E nada disto ocorre na mecânica newtoniana. Isto mostra que as duas teorias são incompatíveis mesmo no limite de baixas velocidades.

Esta análise mostra claramente que na relatividade geral situações cinematicamente equivalentes não são dinamicamente equivalentes. Já Mach acreditava que seria possível formular a mecânica de tal forma que isto ocorresse. Mais uma vez observa-se que as teorias de Einstein não implementam as idéias de Mach.

A discussão desta Seção mostra que a relatividade geral não consegue lidar com a experiência do balde de Newton em todos os sistemas de referência. A mecânica newtoniana, por outro lado, pode explicar esta experiência em todos os referenciais, utilizando $m_i\vec{a}$ nos inerciais ou a força centrífuga nos não-inerciais. E todas estas forças, tanto $m_i\vec{a}$ quanto a centrífuga, não estão relacionadas com a matéria distante, o que mostra a coerência da teoria clássica. Já a teoria de Einstein não apresenta a mesma coerência.

7.5 Comentários Gerais

Concluindo, podemos dizer que há muitos problemas com as teorias especial e geral da relatividade de Einstein. Enfatizamos alguns aqui.

1) Elas são baseadas na formulação de Lorentz da eletrodinâmica de Maxwell, formulação esta que apresenta diversas assimetrias como as apontadas por Einstein e muitos outros. Estas assimetrias de explicação não aparecem nos fenômenos observados de indução e de outros tipos. Há uma outra teoria do eletromagnetismo que evita todas estas assimetrias de forma natural, ou seja, onde elas não aparecem: a eletrodinâmica de Weber, [Ass94] e [Ass95b]. Este é um ponto de partida para se explicar a inércia muito melhor do que a força de Lorentz.

2) A teoria da relatividade especial de Einstein mantém como na mecânica clássica o conceito de espaço absoluto e o de referenciais inerciais desvinculados da matéria distante. E ainda por cima introduz uma outra grandeza absoluta na física, a velocidade da luz no vácuo. Nada na física leva à conclusão de que a velocidade da luz deva ser constante qualquer que seja o movimento do observador ou do detector. Todas as velocidades conhecidas por nós são constantes ou em relação à fonte (como no caso de projéteis) ou constantes em relação ao meio (como no caso da velocidade do som, que não depende da velocidade da fonte). Mas todas elas mudam dependendo do movimento do observador ou do detector. Afirmar o oposto, como fez Einstein, só pode gerar a necessidade de introduzir conceitos estranhos e desnecessários como os de dilatação do tempo, contração de comprimento, tempo próprio etc. Esta teoria manteve o conceito de espaço absoluto (ou de referencial inercial desvinculado de qualquer matéria) e ainda introduziu o caráter absoluto da velocidade da luz no vácuo. Para evitar confusão com as teorias de Einstein estamos utilizando o nome de "Mecânica Relacional" ao trabalho desenvolvido aqui. Nosso trabalho é realmente baseado apenas em conceitos relativos, sem usar o espaço absoluto ou a velocidade absoluta da luz no vácuo.

3) Einstein passa a gerar confusões em toda a física quando começa a interpretar a velocidade que aparece na força de Lorentz como sendo a velocidade da carga teste em relação ao observador (e não em relação ao meio dielétrico onde a carga está se movendo, nem mesmo em relação ao ímã ou fio com corrente que estão gerando a força magnética), contrariamente às interpretações de Thomson, Heaviside e Lorentz.

4) Einstein apontou corretamente que a melhor maneira de implementar o princípio de Mach era utilizar apenas a distância entre os corpos interagentes e derivadas desta distância. Infelizmente ele próprio não seguiu este caminho pois pensou que ele era impraticável. Ele estava errado nesta conclusão, como mostramos neste livro. Sua conclusão só pode ser devido ao fato de não conhecer a eletrodinâmica de Weber e aplicações de uma força análoga para a gravitação.

5) Ele corretamente apontou quatro conseqüências que têm de

surgir em qualquer modelo que incorpore o princípio de Mach. Sua própria teoria da relatividade geral não implementou completamente estas quatro conseqüências, como ele próprio mostrou e como indicamos neste trabalho. Como vamos ver neste livro, todas estas quatro conseqüências seguem diretamente e quantitativamente da mecânica relacional baseada nos trabalhos de Mach e de Weber.

6) As forças do tipo da centrífuga e de Coriolis que surgem na relatividade geral com a expressão de Thirring não aparecem como o esperado. Ou seja, os coeficientes numéricos na frente destes termos não são exatamente equivalentes aos que sabemos existir em referenciais não inerciais na mecânica clássica. Além do mais, aparecem termos espúrios como os axiais, os quais não podem ser eliminados da teoria. Por outro lado, sabe-se que estes termos axiais não existem. Nunca se encontrou nenhum efeito ou força em referenciais não inerciais que apontasse na direção de $\vec{\omega}$. Isto é, nunca se observou qualquer efeito devido a eles, embora a ordem de grandeza seja a mesma dos outros termos como a centrífuga que achata a Terra ou que empurra a água para a parede do balde, ou a de Coriolis que altera o plano de oscilação do pêndulo de Foucault, quando analisamos estes fenômenos em referenciais que giram em relação às estrelas.

7) A relatividade geral não pode explicar a experiência do balde de Newton em todos os referenciais, ao contrário do que ocorria com a mecânica clássica.

8) As únicas forças dependentes do referencial na mecânica newtoniana eram as forças inerciais ($m_i\vec{a}$, centrífuga, de Coriolis, etc.). De acordo com Newton, estas forças não tinham relação com as estrelas fixas ou com os corpos distantes no universo, tal que se podia compreender ou aceitar sem maiores problemas este comportamento anômalo. Todas as outras forças entre os corpos materiais eram relacionais, ou seja, só dependendo de grandezas intrínsecas ao sistema como a distância ou velocidade entre eles. Exemplos: a força gravitacional de Newton, a força elástica de uma mola, a força de Coulomb, as forças de contato, as forças de atrito que só dependiam da velocidade relativa entre o corpo de prova e o meio material ao seu redor, etc. Einstein mudou tudo isto introduzindo forças eletromagnéticas dependentes do sistema de referência ou do observador com sua nova

interpretação da velocidade na força de Lorentz. Ele também introduziu forças gravitacionais dependentes do sistema de referência ou do observador com sua teoria da relatividade geral, como vimos ao discutir a experiência do balde com esta teoria.

Parece-nos que todos estes conceitos teóricos de contração de comprimento, dilatação do tempo, invariância de Lorentz, leis covariantes e invariantes, métrica de Minkowski, espaço-tempo quadri-dimensional, tensor de energia-momento, geometria riemanniana aplicada na física, elemento de Schwarzschild, álgebras tensoriais em espaços quadri-dimensionais, quadri-vetores, tensor métrico $g_{\mu\nu}$, símbolos de Christoffel, super cordas, curvatura do espaço, ..., desempenham o mesmo papel que os epiciclos na teoria ptolomaica.

Concordamos completamente com O'Rahilly sobre os diversos problemas e confusões que as teorias da relatividade de Einstein trouxeram para a física: [O'R65], Vol. 2, Cap. XIII, Seção 5, págs. 662-71.

Embora Einstein tenha sido fortemente influenciado pelas idéias de Mach como ele mesmo afirmou diversas vezes, o próprio Mach rejeitou as teorias da relatividade de Einstein. No prefácio de seu último livro intitulado *Os Princípios da Física Óptica - Um Tratamento Histórico e Filosófico*, [Mac26], ele escreveu (nossa ênfase):

> Por causa de minha velhice e doença decidi, cedendo a pressão do meu editor, mas contrariamente à minha prática usual, entregar esta parte do livro para ser publicada, enquanto que a radiação, o declínio da teoria de emissão da luz, a teoria de Maxwell, juntamente com a relatividade, serão tratados brevemente numa parte subsequente. As questões e dúvidas surgindo do estudo destes capítulos formaram o assunto de pesquisas tediosas realizadas conjuntamente com meu filho, que tem sido meu colega por muitos anos. Teria sido desejável que a segunda parte feita em colaboração fosse publicada quase que imediatamente, mas *sou compelido, naquela que pode ser minha última oportunidade, a cancelar minha contemplação da teoria da relatividade.*
>
> *Concluo a partir das publicações que têm chegado a mim e*

> *especialmente da minha correspondência, que estou sendo gradualmente considerado como o precursor da relatividade. Mesmo agora sou capaz de visualizar aproximadamente quais as novas exposições e interpretações que muitas das idéias expressas em meu livro sobre a Mecânica vão receber no futuro do ponto de vista da relatividade.*
>
> Era para ser esperado que os filósofos e físicos devessem conduzir uma cruzada contra mim pois, como já observei repetidamente, fui meramente um caminhante sem preconceitos, dotado de idéias originais em vários campos do conhecimento. *Tenho, contudo, certamente de negar ser um precursor dos relativistas assim como recuso a crença atomística dos dias de hoje.*
>
> *O motivo pelo qual e a extensão a que desacredito da teoria da relatividade dos dias de hoje, a qual encontro estar ficando cada vez mais dogmática, juntamente com os motivos particulares que me levaram a tal ponto de vista - considerações baseadas na fisiologia dos sentidos, nas idéias teóricas e acima de tudo nas concepções resultantes de minhas experiências - têm de ser tratados na seqüência.*
>
> A quantidade sempre crescente de pensamento devotado ao estudo da relatividade não será, na verdade, perdida; ela já foi frutífera e de valor permanente para a matemática. Será ela, contudo, capaz de manter sua posição no conceito físico do universo de algum período futuro como uma teoria que tem de encontrar um lugar num universo aumentado por uma multidão de novas idéias? *Provará ela ser mais do que uma inspiração transitória na história da ciência?*

Provas adicionais de que Mach se opôs às teorias da relatividade de Einstein podem ser encontradas na biografia de Mach escrita por Blackmore, [Bla72] e em seu importante artigo intitulado "Ernst Mach leaves 'The Church of Physics'," [Bla89]. Também nos opomos às teorias da relatividade de Einstein (tanto a geral quanto a

especial) pelos motivos expostos neste Capítulo. No lugar das teorias de Einstein propomos a Mecânica Relacional como desenvolvida nas próximas páginas.

Parte II

Mundo Novo

Capítulo 8

Mecânica Relacional

8.1 Conceitos Primitivos e Postulados

Apresentamos agora a nova mecânica que estamos propondo para substituir as formulações newtoniana e einsteiniana. A denominamos de "Mecânica Relacional." Inicialmente mostramos a formulação completa da teoria e discutimos suas aplicações. Num Capítulo final apresentamos a história da mecânica relacional enfatizando os principais desenvolvimentos e colocando todos os aspectos na perspectiva histórica.

Por mecânica relacional entendemos uma formulação da mecânica (o estudo do equilíbrio e do movimento dos corpos) baseada apenas em quantidades relativas (como a distância entre os corpos que estão interagindo e as velocidades radiais entre eles), evitando o uso de conceitos como o espaço e o tempo absolutos de Newton. Também se evita aqui grandezas que dependam do observador, como a velocidade na força de Lorentz da forma interpretada por Einstein. Não utilizamos a antiga expressão "mecânica relativística" para evitar confusões com as teorias especial e geral da relatividade de Einstein.

Começamos apresentando alguns conceitos primitivos, isto é, conceitos básicos necessários para se definir e compreender outros mais complexos. Não definimos estes conceitos primitivos para evitar círculos viciosos. Os conceitos primitivos que vamos precisar são: (1) massa gravitacional, (2) carga elétrica, (3) distância entre corpos materiais, (4) tempo entre eventos físicos e (5) força ou interação entre corpos materiais.

Pode ser que a força gravitacional seja derivada de uma força eletromagnética como mostramos em [Ass92c] e [Ass95d]. Se este for o caso então o conceito de massa gravitacional passa a ser redundante. Como isto ainda não está confirmado vamos continuar a tratar a massa gravitacional como um conceito primitivo.

Em nenhum lugar introduzimos os conceitos de inércia ou de

massa inercial, de sistemas inerciais de referência, nem os conceitos de espaço e tempo absolutos.

Agora apresentamos os três postulados ou axiomas da mecânica relacional:

(I) Força é uma quantidade vetorial que descreve a interação entre corpos materiais.

(II) A força que uma partícula pontual A exerce sobre uma partícula pontual B é igual e oposta a força que B exerce sobre A e é direcionada ao longo da linha reta conectando A até B.

(III) A soma de todas as forças de qualquer natureza (gravitacional, elétrica, magnética, elástica, nuclear, ...) agindo sobre qualquer corpo é sempre nula em todos os sistemas de referência.

O primeiro postulado qualifica a natureza de uma força (dizendo que ela é uma quantidade vetorial, com módulo, direção e sentido). Mais importante do que isto é que ele especifica sua propriedade de se adicionar como vetores, ou seja, a lei do paralelogramo de forças. Observe apenas que ainda não estamos falando de acelerações, mas apenas de forças. Este postulado também deixa claro que força é uma interação entre corpos materiais. Ela não descreve, por exemplo, uma interação de um corpo com o "espaço."

O segundo postulado é similar à lei de ação e reação de Newton, ou seja: $\vec{F}_{AB} = - \vec{F}_{BA}$. Além do mais, estamos especificando que todas as forças entre partículas pontuais, não interessando sua origem (elétrica, elástica, gravitacional, ...) são direcionadas ao longo das linhas retas conectando estes corpos. É importante enfatizar aqui partículas "pontuais." O motivo é simples e podemos ilustrar o assunto com um contra-exemplo. Seja um dipolo elétrico constituído de duas cargas pontuais $q_1 > 0$ e $-q_1$ separadas por uma distância d_1. Escolhemos um sistema de referência O com origem no centro deste dipolo, com eixo z ao longo da reta que une q_1 e $-q_1$, apontando de $-q_1$ para q_1. O momento de dipolo elétrico $\vec{p}_1$ é então dado por $\vec{p}_1 = q_1 d_1 \hat{z}$. Seja uma outra carga pontual $q_2 > 0$ colocada sobre o eixo x a uma distância r_2 da origem. Consideramos todas as cargas em repouso, sendo este um problema simples de eletrostática. A força exercida por q_1 sobre q_2 está ao longo da reta que as une. A força exercida por $-q_1$ sobre q_2 está ao longo da reta que une estas duas últimas

cargas. Já a força exercida pelo dipolo $\vec{p}_1$ sobre q_2 (ou seja, a soma destas duas forças anteriores) está ao longo do eixo z, ver a Figura 8.1.

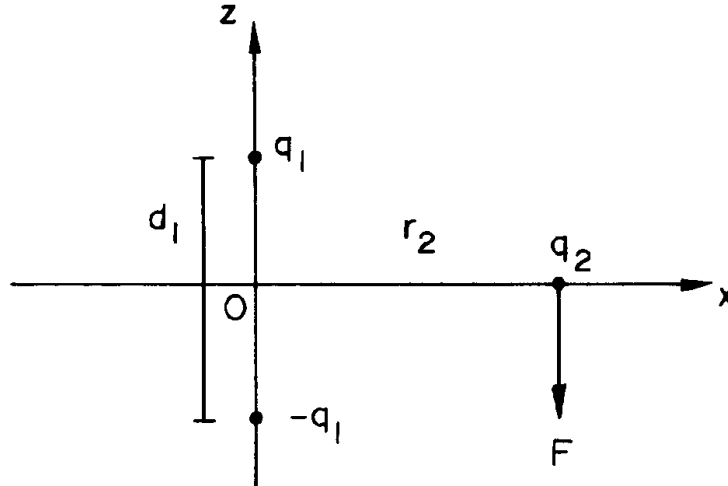



Figura 8.1: Carga interagindo com um dipolo elétrico.

Ou seja, mesmo se $d_1 \ll r_2$ a força entre o dipolo e q_2 não está ao longo do eixo x, que poderia ser considerada a reta unindo o dipolo "pontual" (isto é, seu centro) com a carga q_2 muito afastada. O motivo para isto é que mesmo neste caso em que $d_1 \ll r_2$, o dipolo não é de fato pontual, havendo uma pequena distância entre suas cargas constituintes.

Tirando casos como estes, muitas vezes podemos aproximar dois corpos extensos A e B por partículas pontuais quando seus tamanhos (diâmetros máximos) são muito menores do que a distância entre eles (entre seus centros).

O terceiro postulado apresenta a principal mudança em relação à mecânica newtoniana. Podemos chamá-lo de princípio de equilíbrio dinâmico. Dizemos aqui que a soma de todas as forças atuando em um corpo é sempre nula, mesmo quando este corpo está em movimento e acelerado em relação a outros corpos, em relação a nós mesmos, ou a qualquer outro referencial. Mais tarde vamos *derivar* uma lei similar à segunda lei do movimento de Newton.

A vantagem deste terceiro postulado comparado com a segunda lei do movimento de Newton é que não introduzimos nele os conceitos de inércia, de massa inercial, de espaço absoluto nem de sistema de referência inercial. Na mecânica newtoniana tínhamos que a soma de todas as forças era igual a variação do momento linear (produto da massa inercial pela velocidade) com o tempo. No caso de massa constante, isto era igual ao produto da massa inercial do corpo por sua aceleração em relação ao espaço absoluto, ou em relação a um sistema de referência inercial. Isto significa que estes conceitos tinham de ter sido introduzidos e clarificados anteriormente e que formam uma parte essencial da segunda lei do movimento de Newton. O nosso postulado evita tudo isto e esta é sua maior vantagem. Além do mais, ele é válido em todos os sistemas de referência, enquanto que a segunda lei de Newton só era válida em sistemas inerciais, caso contrário seria necessário introduzir as forças fictícias. Suponha uma pessoa sobre a superfície da Terra jogando uma pedra para cima na presença de um forte vento que afeta o movimento da pedra em direção e magnitude. Durante todo o tempo a pessoa vai aplicar o postulado de que a força resultante agindo sobre a pedra é nula, mesmo quando a pedra está subindo, descendo, parando no solo e permanecendo lá em repouso. No referencial da pedra (isto é, num referencial sempre em repouso em relação à pedra) também deve-se aplicar o postulado de que a força resultante agindo sobre ela é nula durante todo este tempo. E em qualquer outro sistema de referência arbitrário que se move em relação à Terra e à pedra, também se deve utilizar este postulado de que a força resultante agindo sobre a pedra é sempre nula.

Ao aplicar o terceiro postulado chegamos a outro resultado que concorda com as idéias de Mach. Isto é, podemos multiplicar todas as forças por uma mesma constante (tendo ou não tendo dimensões) sem afetar os resultados, já que as únicas coisas que vão interessar são razões entre cada par de forças. Nunca podemos saber o valor absoluto de qualquer força, mas apenas quantas vezes uma força é maior ou menor do que outra. As dimensões das forças também ficam indefinidas, desde que todas as forças tenham a mesma dimensão. Neste livro utilizamos apenas forças especificadas com a unidade de

Newton, N, para tornar tudo similar à mecânica newtoniana, embora isto não seja obrigatório ou necessário.

Se trabalhamos com energias ao invés de forças, estes três postulados podem ser substituídos por um único, a saber: "A soma de todas as energias de interação (gravitacional, elétrica, elástica, ...) entre qualquer corpo e todos os outros corpos no universo é sempre nula em todos os sistemas de referência." Mais uma vez apenas a razão entre energias vai ter relevância. Este postulado pode ser chamado de princípio de conservação da energia. A vantagem deste postulado em relação ao postulado análogo da mecânica clássica (a soma da energia cinética com as energias potenciais é uma constante para sistemas conservativos) é que não introduzimos aqui o conceito de energia cinética $m_i v^2/2$. Esta grandeza tem embutido nela o conceito de massa inercial e de espaço absoluto ou sistemas inerciais (os sistemas em relação aos quais se deve medir a velocidade v). Mais tarde vamos *derivar* uma energia similar a esta energia cinética e também um postulado de conservação da energia análogo a este da mecânica clássica.

8.2 Forças Eletromagnéticas e Gravitacionais

Estes postulados se referem apenas às forças entre corpos materiais. Até agora os conceitos de carga elétrica, massa gravitacional e distância entre corpos não apareceram. Para implementar estes postulados e para obter as equações de movimento seguindo as idéias de Mach, precisamos de algumas expressões para as forças e energias. Estes postulados só fazem sentido juntamente com as leis de força e energia descrevendo os diversos tipos de interação, assim como acontecia com os postulados ou leis do movimento de Newton. Aqui vem a principal contribuição de Wilhelm E. Weber, (1804-1891). Em 1848 ele propôs que a energia de interação entre duas cargas elétricas q_1 e q_2 fosse dada por ([Ass94], Cap. 3 e [Ass95b], Cap. 2):

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r_{12}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) . \tag{8.1}$$

Aqui $c \equiv (\mu_o \varepsilon_o)^{-1/2} = 3 \times 10^8 \ m/s$, r_{12} é a distância entre as cargas

e $\dot{r}_{12} \equiv dr_{12}/dt$.

A força exercida por 2 em 1 pode ser obtida de $\vec{F}_{21} = -\hat{r}_{12} dU_{12}/dr_{12}$. Com isto se obtém o resultado que Weber já havia proposto em 1846, chegando a ele por outro caminho. Esta força de Weber é dada por:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2} \right) . \quad (8.2)$$

As cargas q_1 e q_2 estão localizadas em $\vec{r}_1 \equiv x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$ e $\vec{r}_2 \equiv x_2\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z}$, respectivamente, em relação à origem de um sistema de coordenadas arbitrário (e não necessariamente inercial no sentido newtoniano). Os vetores unitários $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ apontam ao longo dos eixos ortogonais x, y e z deste sistema de referência. As velocidades e acelerações destas cargas em relação à origem deste sistema de coordenadas são dadas por: $\vec{v}_1 = d\vec{r}_1/dt = \dot{x}_1\hat{x} + \dot{y}_1\hat{y} + \dot{z}_1\hat{z}$, $\vec{v}_2 = d\vec{r}_2/dt = \dot{x}_2\hat{x} + \dot{y}_2\hat{y} + \dot{z}_2\hat{z}$, $\vec{a}_1 = d^2\vec{r}_1/dt^2 = d\vec{v}_1/dt = \ddot{x}_1\hat{x} + \ddot{y}_1\hat{y} + \ddot{z}_1\hat{z}$, $\vec{a}_2 = d^2\vec{r}_2/dt^2 = d\vec{v}_2/dt = \ddot{x}_2\hat{x} + \ddot{y}_2\hat{y} + \ddot{z}_2\hat{z}$. O vetor posição de uma carga em relação a outra e suas velocidades vetoriais relativas neste sistema de referência são dadas por, respectivamente:

$$\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x_1 - x_2)\hat{x} + (y_1 - y_2)\hat{y} + (z_1 - z_2)\hat{z} \equiv x_{12}\hat{x} + y_{12}\hat{y} + z_{12}\hat{z} ,$$

$$\vec{v}_{12} \equiv \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (\dot{x}_1 - \dot{y}_1)\hat{x} + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)\hat{y} + (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)\hat{z}$$

$$\equiv \dot{x}_{12}\hat{x} + \dot{y}_{12}\hat{y} + \dot{z}_{12}\hat{z} ,$$

$$\vec{a}_{12} \equiv \frac{d^2\vec{r}_{12}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)\hat{x} + (\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2)\hat{y} + (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2)\hat{z}$$

$$\equiv \ddot{x}_{12}\hat{x} + \ddot{y}_{12}\hat{y} + \ddot{z}_{12}\hat{z} .$$

Elas estão separadas por uma distância

$$r_{12} \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}$$

$$= \sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2} \; .$$

O vetor unitário apontando de q_2 para q_1 é dado por:

$$\hat{r}_{12} \equiv \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \; .$$

A velocidade e aceleração relativas *radiais* entre elas são dadas por, respectivamente:

$$\dot{r}_{12} \equiv \frac{dr_{12}}{dt} = \frac{x_{12}\dot{x}_{12} + y_{12}\dot{y}_{12} + z_{12}\dot{z}_{12}}{r_{12}} = \hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12} \; ,$$

$$\ddot{r}_{12} \equiv \frac{d\dot{r}_{12}}{dt} = \frac{d^2 r_{12}}{dt^2} = \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12}}{r_{12}} \; .$$

As propriedades e vantagens da teoria eletromagnética de Weber foram discutidas em detalhes em outros livros: [Ass94] e [Ass95b].

Em analogia com a eletrodinâmica de Weber, propomos como a base da mecânica relacional que a lei de Newton da gravitação universal seja modificada para ficar nos moldes da lei de Weber. Em particular, a energia de interação entre duas massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2} e a força exercida por 2 em 1 devem ser dadas por, respectivamente:

$$U_{12} = -G\frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \left(1 - \xi \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) \; , \qquad (8.3)$$

$$\vec{F}_{21} = -G m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) \right] \; . \qquad (8.4)$$

Nestas equações ξ é uma constante adimensional. Com $\xi = 0$ ou $c \to \infty$ obtemos a energia potencial e a força da mecânica clássica. Por hora apenas impomos que $\xi > 0$. Mais tarde veremos que $\xi = 6$ para que se possa derivar a precessão do periélio dos planetas como observado pelos astrônomos.

Para evitar o paradoxo gravitacional apresentado anteriormente e um outro análogo que aparece quando implementamos o princípio de

Mach através da mecânica relacional, podemos utilizar as seguintes modificações destas energias e forças:

$$U_{12} = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}}\left(1 - \xi\frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right)e^{-\alpha r_{12}} \ , \tag{8.5}$$

$$\vec{F}_{21} = -Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left[1 - \frac{\xi}{c^2}\left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12}\right)\right.$$
$$\left. + \alpha r_{12}\left(1 - \frac{\xi}{2}\frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2}\right)\right]e^{-\alpha r_{12}} \ . \tag{8.6}$$

Nestas equações α é uma constante com dimensões do inverso de comprimento.

A força aqui também foi derivada por

$$\vec{F}_{21} = -\hat{r}_{12}\frac{dU_{12}}{dr_{12}} \ .$$

As principais propriedades da energia potencial e força de Weber aplicadas ao eletromagnetismo e à gravitação são as seguintes:

A) Estas forças seguem estritamente o segundo postulado, já que elas obedecem ao princípio de ação e reação e estão ao longo da linha reta que une os corpos interagentes.

B) Obtemos as forças elétrica de Coulomb e gravitacional de Newton quando não há movimento entre as partículas, isto é, quando $\dot{r}_{12} = 0$ e $\ddot{r}_{12} = 0$. Isto acontece quando a distância entre as partículas é constante, mesmo que elas estejam se movendo juntas em relação a um sistema de referência arbitrário ou em relação a outros corpos.

C) A propriedade mais importante é que estas energias e forças dependem apenas da distância relativa, da velocidade radial e da aceleração radial entre as partículas interagentes. Embora a posição, velocidade e aceleração de uma partícula em relação a um sistema de referência O possam ser diferentes da posição, velocidade e aceleração da mesma partícula em relação a um outro sistema de referência O', a distância, velocidade radial relativa e aceleração radial relativa entre duas partículas são as mesmas em ambos os sistemas de referência, ver

[Ass94], Seção 3.2. Isto é, estas forças e energias são completamente relacionais por natureza. Elas têm o mesmo valor para todos os observadores, independente se eles são ou não inerciais do ponto de vista newtoniano.

Todas as energias e leis de força a serem propostas no futuro têm de ter esta propriedade para poder implementar o princípio de Mach de forma coerente. Como já mostramos antes, Mach enfatizou que "todas as massas e todas as velocidades e, conseqüentemente, todas as forças são relativas."

Mesmo quando temos um meio, como no caso da força de atrito agindo entre um projétil e o ar ou a água que o circundam, só devem aparecer quantidades relacionais. Por exemplo, a força de atrito dinâmico tem de ser escrita em termos da velocidade relativa entre o projétil e o meio (ar ou água neste caso).

A situação na física de hoje em dia é bem diferente. Na segunda lei do movimento de Newton temos acelerações relativas ao espaço absoluto ou a sistemas de referência inerciais. A situação é ainda pior na força de Lorentz, $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, onde a velocidade $\vec{v}$ da carga de prova q é entendida (após Einstein) como sua velocidade em relação ao observador e não em relação ao ímã ou ao fio com corrente com o qual a carga teste está obviamente interagindo.

8.3 Implementação do Princípio de Mach

Mostramos agora como implementar quantitativamente o princípio de Mach com base nestes postulados e forças relacionais.

Inicialmente consideramos uma partícula teste com massa gravitacional m_g no interior de uma casca esférica com massa gravitacional dM_g. A casca tem um raio R, uma espessura dR, uma densidade de massa gravitacional isotrópica $\rho_g(R)$ e gira com uma velocidade angular $\vec{\omega}_{MS}(t)$ em relação a um sistema de referência arbitrário S. O centro desta casca estacionária (mas girando) é na origem O de S.

A massa gravitacional da casca esférica é dada por:

$$dM_g = 4\pi\rho_g R^2 dR \ .$$

A massa pontual m_g está localizada em $\vec{r}_{mS}$ e se move com velo-

cidade $\vec{v}_{mS} = d\vec{r}_{mS}/dt$ e aceleração $\vec{a}_{mS} = d^2\vec{r}_{mS}/dt^2$ em relação a origem O de S, Figura 8.2.

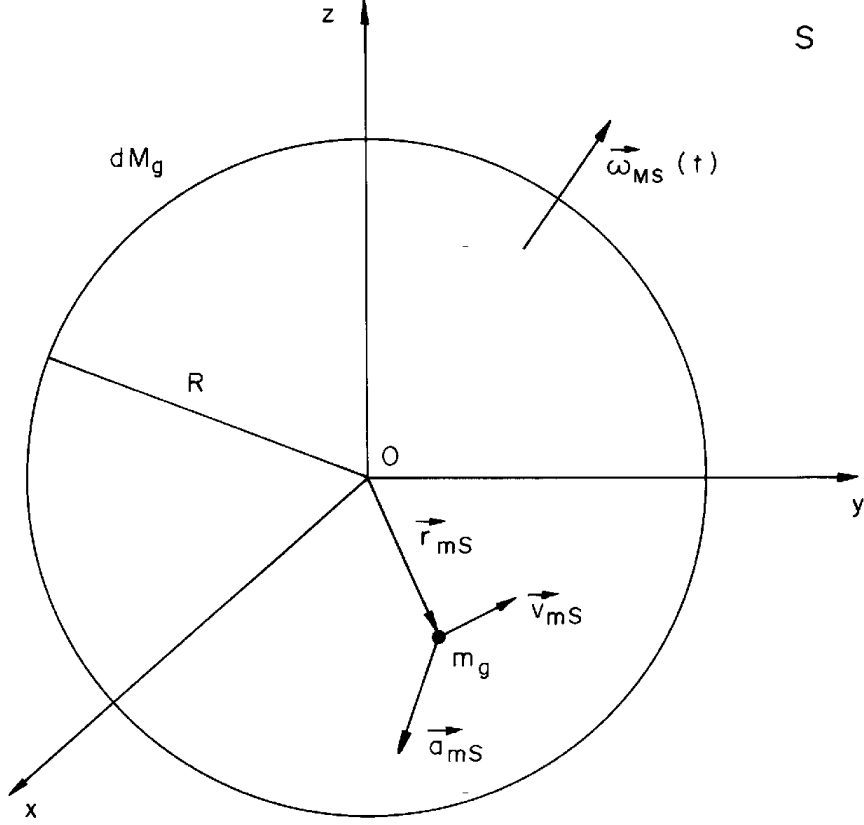



Figura 8.2: Casca esférica girando interagindo com uma partícula.

Integramos agora a energia de interação gravitacional de Weber entre esta partícula teste e a casca, Eq. (8.3), obtendo ([Ass94], Cap. 7):

$$dU_{Mm}(r_{mS} < R) = -4\pi G m_g \rho_g(R) R dR \Bigg[1 - \frac{\xi}{6} \frac{(\vec{v}_{mS} - \vec{\omega}_{MS} \times \vec{r}_{mS}) \cdot (\vec{v}_{mS} - \vec{\omega}_{MS} \times \vec{r}_{mS})}{c^2} \Bigg] . \qquad (8.7)$$

Na mecânica clássica os termos com $\vec{v}_{mS}$ e $\vec{\omega}_{mS}$ não apareceriam. Surgiria apenas o termo constante $-4\pi G m_g \rho_g(R) R dR$ depois de uma integração análoga. Como veremos, são os termos com velocidades que vão gerar um termo similar à energia cinética clássica e proporcionar a implementação do princípio de Mach.

Integrando a Eq. (8.4) para obter a força gravitacional exercida pela casca esférica girante sobre a partícula interna, obtém-se ([Ass94], Cap. 7):

$$d\vec{F}_{Mm}(r_{mS} < R) = -\frac{4\pi}{3} G \frac{\xi}{c^2} m_g \rho_g(R) R dR \Big[\vec{a}_{mS} + \vec{\omega}_{MS} \times (\vec{\omega}_{MS} \times \vec{r}_{mS}) + 2\vec{v}_{mS} \times \vec{\omega}_{MS} + \vec{r}_{mS} \times \frac{d\vec{\omega}_{MS}}{dt} \Big] . \quad (8.8)$$

Nenhum destes termos apareceria com a lei de Newton da gravitação. Como já vimos, Newton provou que a força gravitacional resultante exercida por uma casca esférica sobre um corpo interno é nula com sua lei. Por outro lado, todos estes termos que obtivemos aqui serão essenciais para a implementação do princípio de Mach.

Se a partícula teste estivesse localizada externamente à casca esférica a energia de interação e a força exercida pela casca seriam dadas por ([Ass94]):

$$dU_{Mm}(r_{mS} > R) = -G m_g (4\pi \rho_g R^2 dR) \frac{1}{r_{mS}} \Big\{ 1 - \frac{\xi [\hat{r}_{mS} \cdot (\vec{v}_{mS} - \vec{\omega}_{MS} \times \vec{r}_{mS})]^2}{2c^2} - \frac{\xi}{6c^2} \frac{R^2}{r_{mS}^2} \Big[(\vec{v}_{mS} - \vec{\omega}_{MS} \times \vec{r}_{mS}) \cdot (\vec{v}_{mS} - \vec{\omega}_{MS} \times \vec{r}_{mS}) - 3[\hat{r}_{mS} \cdot (\vec{v}_{mS} - \vec{\omega}_{MS} \times \vec{r}_{mS})]^2 \Big] \Big\} , \quad (8.9)$$

$$d\vec{F}_{Mm}(r_{mS} > R) = -\frac{G m_g (4\pi \rho_g R^2 dR)}{r_{mS}^2} \Big\{ \Big[1$$

$$+\frac{\xi}{c^2}\left((\vec{v}_{mS}\cdot\vec{v}_{mS})-\frac{3}{2}(\hat{r}_{mS}\cdot\vec{v}_{mS})^2+\vec{r}_{mS}\cdot\vec{a}_{mS}\right)\Big]\hat{r}_{mS}$$

$$+\frac{\xi}{c^2}\frac{R^2}{r_{mS}^2}\Big[\frac{r_{mS}}{3}\vec{a}_{mS}-(\hat{r}_{mS}\cdot\vec{v}_{mS})\vec{v}_{mS}$$

$$-\frac{\vec{v}_{mS}\cdot\vec{v}_{mS}}{2}\hat{r}_{mS}+\frac{5}{2}(\hat{r}_{mS}\cdot\vec{v}_{mS})^2\hat{r}_{mS}$$

$$-(\vec{r}_{mS}\cdot\vec{a}_{mS})\hat{r}_{mS}+(\hat{r}_{mS}\cdot\vec{v}_{mS})(\vec{\omega}_{MS}\times\vec{r}_{mS})$$

$$+\frac{2}{3}r_{mS}(\vec{v}_{mS}\times\vec{\omega}_{MS})+\frac{r_{mS}}{3}(\vec{\omega}_{MS}\cdot\vec{r}_{mS})\vec{\omega}_{MS}+\frac{r_{mS}^2\omega_{MS}^2}{6}\hat{r}_{mS}$$

$$-\frac{(\vec{r}_{mS}\cdot\vec{\omega}_{MS})^2}{2}\hat{r}_{mS}+[\vec{r}_{mS}\cdot(\vec{\omega}_{MS}\times\vec{v}_{mS})]\hat{r}_{mS}$$

$$+\frac{r_{mS}}{3}\left(\vec{r}_{mS}\times\frac{d\vec{\omega}_{MS}}{dt}\right)\Big]\Big\}\ . \qquad (8.10)$$

Suponhamos agora a casca ainda girando com $\vec{\omega}_{MS}$ em relação a S. Mas agora vamos supor seu centro localizado em $\vec{R}_{oS}$ e movendo-se com velocidade $\vec{V}_{oS}$ e aceleração $\vec{A}_{oS}$ em relação à origem de S. A integração das Eqs. (8.3) e (8.4) dá um resultado análogo às Eqs. (8.7) até (8.10), mas substituindo $\vec{r}_{mS}-\vec{R}_{oS}$, $|\vec{r}_{mS}-\vec{R}_{oS}|$, $\hat{r}_{mo}\equiv(\vec{r}_{mS}-\vec{R}_{oS})/|\vec{r}_{mS}-\vec{R}_{oS}|$, $\vec{v}_{mS}-\vec{V}_{oS}$ e $\vec{a}_{mS}-\vec{A}_{oS}$ no lugar de $\vec{r}_{mS}$, r_{mS}, $\hat{r}_{mS}$, $\vec{v}_{mS}$ e $\vec{a}_{mS}$, respectivamente.

Para obter a equação para a conservação da energia e a equação de movimento para o corpo de prova, precisamos incluir sua interação com todos os corpos do universo. Dividimos esta interação em dois grupos. (A) O primeiro grupo é composto por sua interação com os corpos locais (a Terra, ímãs, cargas elétricas, molas, forças de atrito etc.) e com distribuições anisotrópicas de corpos ao seu redor (a Lua e o Sol, a matéria ao redor do centro de nossa galáxia etc.) A energia do corpo de prova interagindo com todos estes N corpos será

representada por $U_{Am} = \sum_{j=1}^{N} U_{jm}$, onde U_{jm} é a energia do corpo de prova de massa gravitacional m_g interagindo com o corpo j. O subíndice A significa anisotrópico mas também inclui corpos locais que podem estar localizados ao redor do corpo de prova. A força exercida por todos estes N corpos sobre m_g será representada por $\vec{F}_{Am} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm}$, onde $\vec{F}_{jm}$ é a força exercida por j sobre m_g.

(B) O segundo grupo é composto pela interação do corpo de prova m_g com distribuições isotrópicas de matéria distante ao seu redor. Por distribuições isotrópicas queremos dizer corpos espalhados com simetria esférica ao redor de m_g, tal que m_g esteja dentro destas distribuições, embora não necessariamente estando no centro delas. A energia de interação de m_g com estas distribuições isotrópicas será representada por U_{Im}, onde o subíndice I vem de isotrópica. A força exercida por estas distribuições isotrópicas sobre m_g será representada por $\vec{F}_{Im}$. Utilizamos agora um fato conhecido de que o universo é altamente isotrópico quando medido pela radiação de fundo na região de microondas e de raios-X, ou por contagem de fontes de rádio e de galáxias distantes, [Ass89a]. Deve ser observado que não estamos assumindo teoricamente que este fato é verdadeiro. Para nós este fato vem das observações astronômicas e não de uma hipótese teórica. Mesmo que algum dia se descubra que o universo não é isotrópico em grande escala, ainda assim poderemos derivar os principais resultados da mecânica relacional pois mesmo neste caso ainda poderemos ter a inércia do corpo vindo da parte isotrópica do universo, com a parte anisotrópica contribuindo com as forças usuais. Como a Terra não ocupa uma região central em relação ao universo como um todo, este fato (isotropia observada no universo) sugere homogeneidade numa escala muito grande. Isto é, a densidade de matéria média no universo não deve depender de R (a distância do ponto considerado até nós): $\rho_g(R) = \rho_o = constante$. Devido a grande distância entre as galáxias e a suas neutralidades elétricas, elas só podem interagir de maneira significativa com corpos distantes através de forças gravitacionais. Podemos então integrar as Eqs. (8.7) e (8.8) utilizando uma densidade de matéria constante. Desta maneira encontramos U_{Im}, a energia de interação de m_g com a parte isotrópica do universo distante. Isto é, sua interação com a distribuição isotrópica e

homogênea de galáxias que está girando com uma velocidade angular $\vec{\omega}_{US}$ em relação ao sistema de referência S, Figura 8.3. Analogamente também podemos obter a força $\vec{F}_{Im}$ exercida por esta parte isotrópica do universo distante sobre m_g:

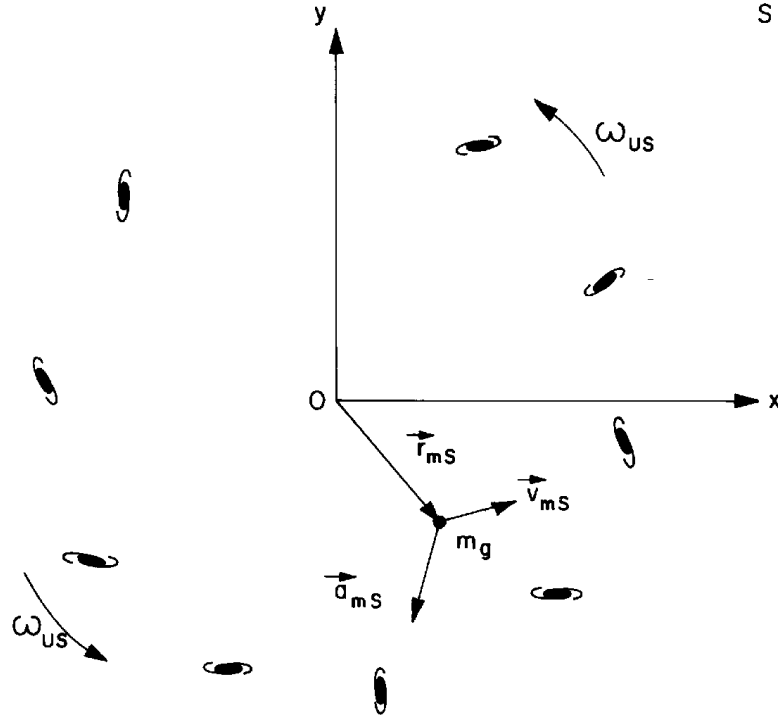



Figura 8.3: Conjunto de galáxias distantes girando em relação a S.

$$U_{Im} = -\Phi \left[\frac{3}{\xi} m_g c^2 \right.$$

$$\left. - \, m_g \frac{(\vec{v}_{mS} - \vec{\omega}_{US} \times \vec{r}_{mS}) \cdot (\vec{v}_{mS} - \vec{\omega}_{US} \times \vec{r}_{mS})}{2} \right] , \qquad (8.11)$$

$$\vec{F}_{Im} = -\Phi m_g \left[\vec{a}_{mS} + \vec{\omega}_{US} \times (\vec{\omega}_{US} \times \vec{r}_{mS})\right.$$

$$\left. + \, 2\vec{v}_{mS} \times \vec{\omega}_{US} + \vec{r}_{mS} \times \frac{d\vec{\omega}_{US}}{dt}\right] , \qquad (8.12)$$

onde

$$\Phi \equiv \frac{4\pi}{3} G \frac{\xi}{c^2} \int_0^{c/H_o} \rho_g(R) R dR = \frac{2\pi}{3} \xi \frac{G\rho_o}{H_o^2} \ . \qquad (8.13)$$

Nesta última equação H_o é a constante de Hubble e c/H_o é o raio observável e conhecido do universo.

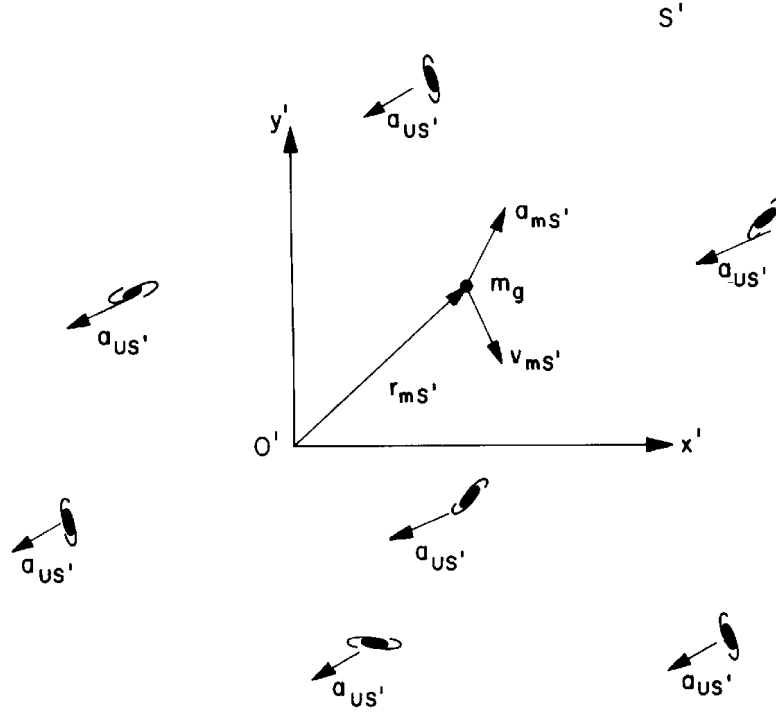



Figura 8.4: Universo distante com uma aceleração linear em relação a S'.

Pelo princípio de ação e reação obedecido pela força de Weber obtemos que o corpo m_g exerce uma força exatamente igual e oposta no universo distante.

Num sistema de referência S' no qual o universo como um todo (isto é, o conjunto de galáxias distantes) não está girando, $\vec{\omega}_{US'} = 0$, mas no qual o universo como um todo se move em relação a S' com uma aceleração de translação $\vec{a}_{US'}$, a integração da Eq. (8.8) leva a:

$$\vec{F}_{Im} = -\Phi m_g(\vec{a}_{mS'} - \vec{a}_{US'}) \ . \tag{8.14}$$

Aqui $\vec{a}_{mS'}$ é a aceleração de m_g em relação a S', Figura 8.4. Novamente m_g exercerá uma força igual e oposta sobre o conjunto de galáxias distantes.

Se tivéssemos utilizado as Eqs. (8.5) e (8.6) poderíamos ter integrado R de zero até o infinito, sem obter divergências. Obteríamos então as equações (8.11) até (8.14) com $A \equiv 4\pi\xi G\rho_o/3H_o^2$ ao invés de Φ, se em (8.5) e (8.6) tivéssemos utilizado $\alpha = H_o/c$, [Ass94], Cap. 7:

$$A \equiv \frac{4\pi}{3}G\frac{\xi}{c^2}\rho_o\int_0^\infty Re^{-H_oR/c}dR = \frac{4\pi}{3}\xi\frac{G\rho_o}{H_o^2} \ . \tag{8.15}$$

Deve ser enfatizado que o ρ_o que aparece nas equações (8.13) e (8.15) é a densidade volumétrica das galáxias no espaço (N vezes a massa média de cada galáxia dividido pelo volume ocupado por estas N galáxias, com N bem grande). Além do mais, estamos integrando sobre todo o universo conhecido. Isto significa que a principal contribuição para Φ vem das galáxias distantes e não das estrelas pertencendo a nossa própria galáxia.

Estamos agora aptos a implementar quantitativamente o princípio de Mach utilizando o terceiro postulado de que a soma de todas as forças é nula (ou de que a soma de todas as energias de interação é nula), a saber:

$$U_{Am} + U_{Im} = \sum_{j=1}^{N} U_{jm} - \Phi\left[\frac{3}{\xi}m_g c^2\right.$$

$$- m_g \frac{(\vec{v}_{mS} - \vec{\omega}_{US} \times \vec{r}_{mS}) \cdot (\vec{v}_{mS} - \vec{\omega}_{US} \times \vec{r}_{mS})}{2} \Bigg] = 0 \ , \qquad (8.16)$$

$$\vec{F}_{Am} + \vec{F}_{Im} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - \Phi m_g \Bigg[\vec{a}_{mS} + \vec{\omega}_{US} \times (\vec{\omega}_{US} \times \vec{r}_{mS})$$

$$+ 2\vec{v}_{mS} \times \vec{\omega}_{US} + \vec{r}_{mS} \times \frac{d\vec{\omega}_{US}}{dt} \Bigg] = 0 \ . \qquad (8.17)$$

Mais uma vez num sistema de referência S' no qual o universo como um todo não está girando, $\vec{\omega}_{US'} = 0$, mas que tem uma aceleração de translação como um todo $\vec{a}_{US'}$, esta última equação deve ser substituída por:

$$\vec{F}_{Am} + \vec{F}_{Im} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - \Phi m_g (\vec{a}_{mS'} - \vec{a}_{US'}) = 0 \ . \qquad (8.18)$$

Isto completa a implementação matemática do princípio de Mach. Discutimos agora todas as conseqüências diretas que podemos obter da mecânica relacional.

A Eq. (8.16) é similar à equação da mecânica clássica para a conservação da energia em sistemas de referência não-inerciais. A Eq. (8.17) é similar à segunda lei do movimento de Newton em sistemas de referência não-inerciais. Estas identificações ficam completas se $\Phi = 1$, ou:

$$\Phi = 1 \leftrightarrow 3H_o^2 = 2\pi\xi G\rho_o \ . \qquad (8.19)$$

Esta relação notável ligando três grandezas independentes e mensuráveis (ou observáveis) da física (G, H_o e ρ_o) é uma conseqüência necessária de qualquer modelo tentando implementar o princípio de Mach. Sabe-se que esta relação é aproximadamente verdadeira (com ξ entre 1 e 20) desde a década de 1930 com os grandes números de Dirac, [Dir38]. Mas enquanto que para Dirac esta relação foi derivada mais como uma numerologia sem uma compreensão mais aprofundada, aqui ela é derivada a partir de primeiros princípios como uma

conseqüência da mecânica relacional (para uma derivação alternativa desta relação ver [Rec83]). Também podemos saber que esta relação tem de ser verdadeira a partir da validade da mecânica newtoniana em experiências simples de laboratório. Isto é, como só obtemos a mecânica newtoniana se $\Phi = 1$, concluímos que este tem de ser o caso. Mas o fato mais notável é que a validade desta relação pode ser obtida independentemente utilizando os valores conhecidos de G, H_o e ρ_o. O valor de G é $6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, enquanto que $\rho_o/H_o^2 \approx 4,5 \times 10^8$ kgs^2/m^3, [Bor88], Seções 2.2 e 2.3, págs. 44-74. A maior incerteza está no valor de ρ_o/H_o^2, que ainda não é conhecido com tanta precisão. De agora em diante assumimos que vale exatamente $\Phi = 1$. Ou $A = 1$, se tivéssemos escolhido as Eqs. (8.5) e (8.6), $\alpha = H_o/c$ e tivéssemos integrado até o infinito, tal que neste caso teríamos $3H_o^2 = 4\pi\xi G\rho_o$:

$$A = 1 \leftrightarrow 3H_o^2 = 4\pi\xi G\rho_o \ . \tag{8.20}$$

Se estamos num sistema de referência U no qual o universo como um todo (o referencial das galáxias distantes) está em repouso e sem rotação, as Eqs. (8.16) e (8.17) se reduzem a formas simples dadas por:

$$\sum_{j=1}^{N} U_{jm} + \frac{m_g \vec{v}_{mU} \cdot \vec{v}_{mU}}{2} - \frac{3m_g c^2}{\xi} = 0 \ , \tag{8.21}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \vec{a}_{mU} = 0 \ . \tag{8.22}$$

Aqui $\vec{v}_{mU}$ e $\vec{a}_{mU}$ são a velocidade e a aceleração de m_g em relação ao referencial das galáxias distantes. Neste referencial o conjunto das galáxias distantes é visto em repouso sem qualquer velocidade linear ou angular (desprezando os movimentos peculiares) e também sem qualquer aceleração linear ou angular. Chamaremos a este referencial de sistema de referência universal U, Figura 8.5.

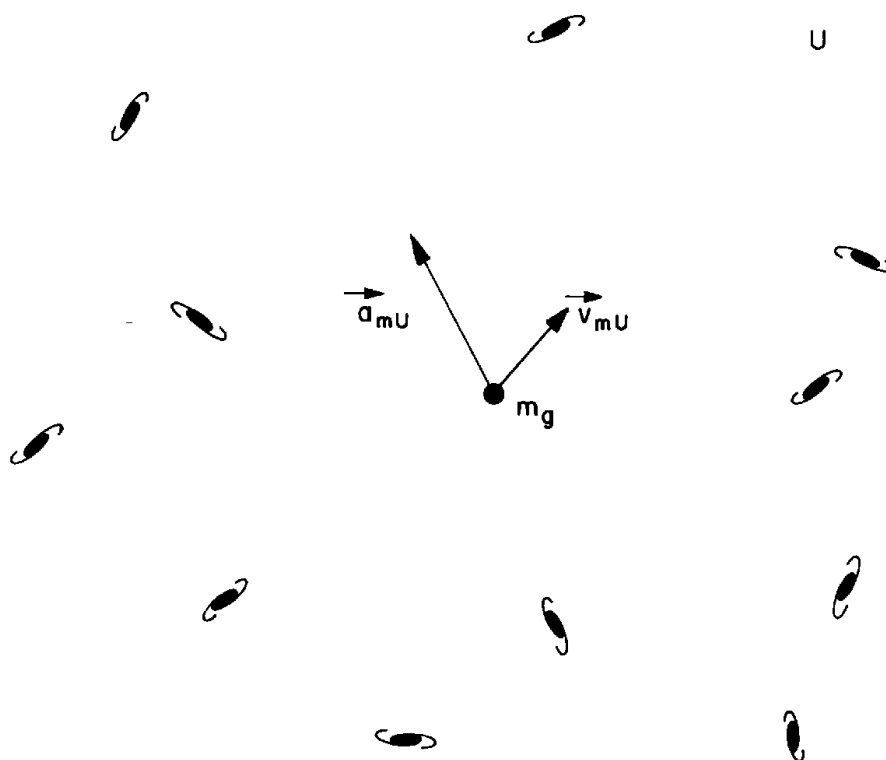



Figura 8.5: Sistema de referência universal U.

Contrariamente ao espaço absoluto de Newton, que não tinha qualquer relação com nada externo, este sistema de referência universal é completamente determinado pelo mundo material distante. Ele é o referencial no qual a matéria distante como um todo está em repouso, apesar da existência de velocidades peculiares ou próprias das galáxias neste referencial. Ou seja, é o referencial no qual a velocidade média das galáxias é nula, apesar de não ser necessário (e obviamente não é este o caso) que todas as galáxias estejam em repouso neste referencial. Neste sistema de referência universal o universo aparece isotrópico em grande escala, com as galáxias distantes estando distribuídas de maneira mais ou menos uniforme. Das observações astronômicas parece que este é o mesmo referencial no qual

a radiação cósmica de fundo é isotrópica sem qualquer anisotropia de dipolo. É neste referencial que as equações de movimento da mecânica relacional ficam na forma mais simples, sem o aparecimento de termos contendo a aceleração do universo distante. Obviamente em qualquer referencial O que se move com uma velocidade linear constante em relação ao referencial U, a equação de movimento ficará de forma tão simples quanto em U, ou seja:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \vec{a}_{mo} = 0 \ ,$$

onde $\vec{a}_{mo}$ é a aceleração de m_g em relação a O.

A Eq. (8.21) é análoga à equação de conservação da energia da mecânica clássica em sistemas de referência inerciais, enquanto que a Eq. (8.22) é análoga à segunda lei do movimento de Newton no espaço absoluto ou em referenciais inerciais. Mas a diferença é que agora nós *derivamos* uma expressão análoga à energia cinética e uma outra análoga a equação de movimento newtoniana. Já na mecânica clássica éramos obrigados a começar com o conceito de energia cinética (ou de postulá-lo), sem saber de onde ele vinha (sem saber sua origem física). Da mesma maneira, Newton foi obrigado a começar com $\vec{F} = m_i \vec{a}$, já que não tinha de onde derivar esta equação. Por este motivo foi necessário introduzir *a priori* o conceito de inércia ou de massa inercial, sem saber de onde ele vinha.

Na mecânica relacional estamos derivando uma energia análoga à energia cinética clássica. Mas quando identificamos esta energia $m_g v_{mU}^2/2$ da Eq. (8.21) com a energia cinética clássica $m_i v^2/2$, passamos a entender imediatamente a proporcionalidade misteriosa entre as massas inerciais e gravitacionais que aparecem na mecânica newtoniana. Isto é, na mecânica relacional obtivemos que a energia cinética é uma energia de interação como qualquer outro tipo de energia potencial. É uma energia de interação gravitacional surgindo do movimento relativo entre m_g e o universo como um todo ao redor deste corpo. Esta energia na mecânica relacional deixa de ser dependente do sistema de referência, ao contrário do que acontecia na mecânica clássica. O motivo para isto é que a energia U_{Im} da Eq. (8.11) tem o mesmo valor numérico (embora não necessariamente a mesma forma)

em todos os sistemas de referência. Por exemplo, num referencial O no qual o universo como um todo (o conjunto das galáxias distantes) não estivesse girando mas apenas transladando com uma velocidade constante $\vec{v}_{UO}$, a parte dependente da velocidade da energia de interação gravitacional de m_g com as galáxias distantes obtida após integrações como fizemos aqui é dada por $m_g|\vec{v}_{mO} - \vec{v}_{UO}|^2/2$ ao invés de $m_g v_{mU}^2/2$, onde $\vec{v}_{mO}$ é a velocidade de m_g em relação a O. E obviamente $m_g v_{mU}^2/2 = m_g|\vec{v}_{mO} - \vec{v}_{UO}|^2/2$ já que $\vec{v}_{mO} = \vec{v}_{mU} + \vec{v}_{UO}$.

A mesma coisa pode ser concluída a partir da Eq. (8.22). Se identificarmos esta equação que foi derivada na mecânica relacional com a segunda lei do movimento de Newton, passamos a entender imediatamente a proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais da mecânica clássica. Isto é, a força $-m_g\vec{a}_{mU}$ da Eq. (8.22) é uma força gravitacional real entre m_g e o universo em grande escala (o conjunto das galáxias distantes) quando há uma aceleração entre eles. A força $\vec{F}_{Im}$ deixa de ser dependente do referencial, ao contrário do que ocorria com $m_i\vec{a}$ da mecânica clássica. No caso da mecânica relacional $\vec{F}_{Im}$ tem o mesmo valor numérico (e aponta na mesma direção em relação a outros corpos) em todos os sistemas de referência, embora não precise ter exatamente a mesma forma. Por exemplo, no sistema de referência universal temos: $\vec{F}_{Im} = -m_g\vec{a}_{mU}$. Em outro sistema de referência S que gira em relação ao referencial das galáxias distantes temos: $\vec{F}_{Im} = -m_g[\vec{a}_{mS} + \vec{\omega}_{US} \times (\vec{\omega}_{US} \times \vec{r}_{mS}) + 2\vec{v}_{mS} \times \omega_{US} + \vec{r}_{mS} \times d\vec{\omega}_{US}/dt]$. Já num outro referencial S' que não gira em relação ao conjunto das galáxias distantes mas que tem uma aceleração translacional em relação a elas temos: $\vec{F}_{Im} = -m_g(\vec{a}_{mS'} - \vec{a}_{US'})$, onde $\vec{a}_{mS'}$ e $\vec{a}_{US'}$ são as acelerações translacionais de m_g e do referencial das galáxias distantes em relação a S'. Embora a forma de $\vec{F}_{Im}$ seja diferente nestes três sistemas de referência U, S e S', o valor numérico é sempre o mesmo. Por este motivo não foi necessário especificar $\vec{F}_{Im}^U$, $\vec{F}_{Im}^S$ ou $\vec{F}_{Im}^{S'}$. Isto é, não precisamos colocar os indicadores U, S e S' nas forças. E não apenas o valor numérico é o mesmo, mas a direção de $\vec{F}_{Im}$ é a mesma em todos estes referenciais, apontando sempre para a mesma direção (para o mesmo corpo material). Isto é, se esta força $\vec{F}_{Im}$ sobre m_g está direcionada num certo momento para uma galáxia como Andrômeda, ela

vai apontar para esta galáxia em todos os referenciais. Por exemplo, suponha que temos dois corpos 1 e 2 ligados por uma mola e oscilando ao longo da reta que os une no referencial U. Suponha também que esta reta unindo os corpos esteja ao longo da mesma reta unindo o centro de nossa galáxia ao centro de Andrômeda. Então as forças $\vec{F}_{I1}$ e $\vec{F}_{I2}$ também vão apontar ao longo da reta conectando 1 a 2 e nossa galáxia a Andrômeda em todos os sistemas de referência. Isto é devido ao fato de que a força de Weber depende apenas de grandezas relacionais como r_{12}, $\dot{r}_{12}$ e $\ddot{r}_{12}$, que têm o mesmo valor em todos os referenciais.

No caso em que a força resultante anisotrópica $\vec{F}_{Am} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm}$ agindo sobre m_g é nula, concluímos a partir da Eq. (8.22), e do fato de que $m_g \neq 0$, que $\vec{a}_{mU} = 0$. Isto é, resulta que o corpo de prova vai se mover com uma velocidade constante em relação ao referencial U no qual o conjunto das galáxias distantes está em repouso. A identificação da mecânica relacional com a mecânica newtoniana mostra que também *derivamos* uma lei do movimento similar à primeira lei de Newton. Mas agora ao invés de dizer que um corpo vai se mover com uma velocidade constante em relação ao espaço absoluto (uma entidade a que não temos nenhum acesso), dizemos que o corpo vai se mover com uma velocidade constante em relação ao referencial das galáxias distantes. Se este é o caso, então o corpo de prova também vai se mover com uma velocidade constante em relação a qualquer outro referencial O que se move com uma velocidade constante em relação ao referencial das galáxias distantes. Estes referenciais podem então ser identificados com os referenciais inerciais da mecânica clássica. Só que agora eles passam a ser completamente determinados pela matéria distante.

A identificação das Eqs. (8.21) e (8.22) com a equação clássica para a conservação da energia e com a segunda lei do movimento de Newton explica a proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais da mecânica newtoniana. Os conceitos de inércia de um corpo, de massa inercial, de sistemas de referência inerciais, de energia cinética etc. nunca foram introduzidos na mecânica relacional. Apenas quando identificamos as Eqs. (8.21) e (8.22) com as equações análogas da mecânica clássica é que passamos a compreender e expli-

car este enigma da teoria newtoniana. Isto é, agora podemos explicar porque as massas gravitacionais e inerciais newtonianas são proporcionais uma a outra. O motivo é que os segundos termos do lado esquerdo das Eqs. (8.21) e (8.22) surgiram de interações gravitacionais entre a massa gravitacional m_g e a massa gravitacional das galáxias distantes quando há um movimento relativo entre m_g e estas galáxias distantes. Isto é, a massa de $m_g v_{mU}^2/2$ ou de $m_g \vec{a}_{mU}$ é a massa gravitacional do corpo de prova. Apenas quando identificamos estes termos com a mecânica newtoniana, onde temos $m_i v^2/2$ e $m_i \vec{a}$, m_i sendo a massa inercial do corpo de prova, passa a ficar claro que estas expressões "cinéticas" da mecânica newtoniana têm uma origem gravitacional. A mecânica clássica ganha um novo significado e passamos a ter uma compreensão clara quando a vemos sob a óptica da mecânica relacional.

Na mecânica relacional não precisamos postular a proporcionalidade ou igualdade entre m_g e m_i, como é necessário fazer na teoria da relatividade geral de Einstein. Einstein havia postulado a igualdade entre m_g e m_i no princípio de equivalência. Como ele postulou esta relação sem fornecer explicações mais fundamentais da origem desta igualdade, vê-se que ele não conseguiu derivá-la. Aqui, este resultado é uma conseqüência direta da teoria. Isto mostra uma das grandes vantagens da mecânica relacional sobre a teoria da relatividade de Einstein.

Uma outra coisa que é explicada imediatamente na mecânica relacional é a igualdade entre $\vec{\omega}_k$ e $\vec{\omega}_d$, isto é, entre as rotações cinemática e dinâmica da Terra. Como acabamos de ver, as equações de movimento da mecânica relacional ficam em suas formas mais simples, ou seja, como as Eqs. (8.21) e (8.22), num sistema de referência em relação ao qual o universo como um todo (o conjunto das galáxias distantes) está em repouso. Em outro sistema de referência S vão aparecer termos na energia U_{Im} e na força $\vec{F}_{Im}$ que vão depender de $\vec{v}_{US}$, de $\vec{a}_{US}$ ou de $\vec{\omega}_{US}$. Isto é, da velocidade, aceleração de translação e velocidade de rotação do universo como um todo em relação a S. Quando identificamos este fato e a mecânica relacional com a mecânica newtoniana tudo fica óbvio e inteligível. Isto é, a explicação desta coincidência da mecânica clássica ($\vec{\omega}_k$ ser igual a $\vec{\omega}_d$) é que o

universo distante como um todo define o melhor sistema inercial (que é o referencial no qual as leis do movimento de Newton são válidas sem a introdução das forças centrífuga e de Coriolis). Isto significa que o conjunto das galáxias distantes não gira em relação ao espaço absoluto (é este o significado do fato observacional de que $\vec{\omega}_k = \vec{\omega}_d$) porque é este conjunto de galáxias que passa a definir o que é o espaço absoluto.

Num sistema de referência S no qual o universo como um todo está girando em relação à origem deste referencial com uma velocidade angular $\vec{\omega}_{US}(t)$ mas sem aceleração translacional, a Eq. (8.17) fica na forma

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \left[\vec{a}_{mS} + \vec{\omega}_{US} \times (\vec{\omega}_{US} \times \vec{r}_{mS}) \right.$$
$$\left. + 2\vec{v}_{mS} \times \vec{\omega}_{US} + \vec{r}_{mS} \times \frac{d\vec{\omega}_{US}}{dt} \right] = 0 \ . \qquad (8.23)$$

Aqui $\vec{r}_{mS}$ é o vetor posição de m_g em relação à origem de S. Além disso, $\vec{v}_{mS}$ e $\vec{a}_{mS}$ são a velocidade e aceleração do corpo de prova em relação a este referencial S.

Este resultado da mecânica relacional tem a mesma forma que a segunda lei do movimento de Newton com as forças fictícias. Identificando estas duas fórmulas leva à conclusão de que as forças centrífuga e de Coriolis deixam de ser fictícias. Na mecânica relacional elas passam a ser vistas como forças reais de origem gravitacional surgindo da interação do corpo de prova com o universo girando ao redor dele. Isto está quase completamente de acordo com as idéias de Mach, pois mostramos aqui que "girando o céu de galáxias, aparecem forças centrífugas!" A única diferença em relação às idéias de Mach, é que ele só conhecia a existência das estrelas fixas. Foi apenas em 1924 que Hubble estabeleceu com certeza a existência de galáxias externas ao conjunto de estrelas fixas que compõem a nossa galáxia. Isto ocorreu após a morte de Mach em 1916. Mostramos aqui que girando apenas nossa própria galáxia (isto é, o céu de estrelas fixas) em relação a um observador, que então vai-se gerar apenas uma pequena força centrífuga dificilmente perceptível. Por outro lado, a rotação de todo

o universo conhecido (o conjunto das galáxias distantes) vai gerar exatamente a força centrífuga que se observa existir em referenciais nos quais o conjunto das galáxias distantes está girando.

Discutimos agora como derivar um outro aspecto que tinha sido corretamente apontado por Mach. Na Eq. (8.22) a aceleração que aparece é a aceleração do corpo de prova m_g em relação ao referencial das galáxias distantes. Isto é, é a aceleração do corpo de prova em relação ao sistema de referência no qual o conjunto das galáxias como um todo não gira e não tem aceleração de translação. Quando estamos lidando com corpos sobre a superfície da Terra, como por exemplo realizando experiências de colisões de bolas de bilhar, em geral medimos apenas as acelerações dos corpos de prova em relação à superfície da Terra. Contudo, a Terra gira ao redor de seu eixo em relação às estrelas fixas com um período de um dia, ela orbita ao redor do Sol em relação às estrelas fixas com um período de um ano e o sistema solar orbita ao redor do centro de nossa galáxia em relação ao referencial das galáxias distantes com um período de $2,5 \times 10^8$ *anos*. Como todos estes movimentos são acelerados em relação ao universo distante, todos eles deveriam ser levados em conta quando tentamos aplicar a Eq. (8.22) para estudar o movimento do corpo de prova. Há, contudo, uma situação onde todos estes aspectos ficam grandemente simplificados: Caso esta aceleração do corpo de prova em relação à Terra seja muito maior do que a aceleração da superfície da Terra neste local em relação ao referencial das galáxias distantes. Há três componentes principais desta aceleração da Terra em cada ponto de sua superfície em relação ao referencial das galáxias distantes. A primeira é sua aceleração centrípeta devido a rotação diurna da Terra em relação às estrelas fixas, a qual é dada no equador terrestre por: $a_r \approx v_t^2/R \approx (4,6 \times 10^2\ m/s)^2/(6,4 \times 10^6\ m) \approx 3,4 \times 10^{-2}\ m/s^2$. A segunda é a aceleração centrípeta devido a translação anual da Terra ao redor do Sol em relação às estrelas fixas, a qual é dada aproximadamente por: $a_t \approx (3 \times 10^4\ m/s)^2/(1,5 \times 10^{11}\ m) \approx 6 \times 10^{-3}\ m/s^2$. E a terceira é a aceleração centrípeta do sistema solar devido a sua órbita ao redor do centro da nossa galáxia em relação ao conjunto das galáxias distantes com um período de $2,5 \times 10^8$ *anos*. Esta aceleração é dada aproximadamente por: $a_s \approx (2 \times 10^5\ m/s)^2/(2,5 \times 10^{20}\ m) \approx$

10^{-10} m/s^2. Representando a aceleração do corpo de prova m_g em relação a Terra por $\vec{a}_{me}$, há uma situação na qual:

$$a_{me} \gg a_r > a_t \gg a_s \ . \tag{8.24}$$

Neste caso podemos desprezar as componentes da aceleração do corpo relacionadas com o movimento da Terra em relação ao conjunto das galáxias distantes e considerar apenas a aceleração do corpo em relação à superfície da Terra. Isto é, quando esta condição é satisfeita podemos dizer que durante esta experiência o conjunto das galáxias distantes vai estar essencialmente sem aceleração em relação ao conjunto das estrelas fixas e também em relação à Terra. Isto significa que as acelerações em relação às galáxias distantes podem ser razoavelmente descritas por acelerações em relação à superfície da Terra. Ou seja, a Eq. (8.22) pode então ser aproximada por (sempre que a relação (8.24) for válida):

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \vec{a}_{me} = 0 \ . \tag{8.25}$$

Isto é, para experiências sobre a superfície da Terra, nas quais o corpo de prova move-se com acelerações satisfazendo a relação (8.24), podemos considerar com uma boa aproximação apenas a sua aceleração em relação à superfície da Terra, esquecendo as acelerações da Terra em relação ao universo distante.

Contudo, se estamos estudando a aceleração da Terra como um todo em sua órbita ao redor do Sol, ou então o movimento de um corpo de prova movendo-se sobre a superfície da Terra com uma aceleração muito pequena da ordem de $a_r \approx 3,4 \times 10^{-2}$ m/s^2 ou de $a_t \approx 6 \times 10^{-3}$ m/s^2, então também precisamos levar em conta estas acelerações. Nestes casos e devido ao fato de que a aceleração centrípeta do sistema solar em relação às galáxias distantes, $a_s \approx 10^{-10}$ m/s^2, é muito menor do que a_r ou a_t, podemos escrever a Eq. (8.22) na forma:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \vec{a}_{mf} = 0 \ . \tag{8.26}$$

Nesta equação $\vec{a}_{mf}$ é a aceleração do corpo de prova em relação ao referencial das estrelas fixas pertencentes a nossa galáxia, isto é, em relação ao referencial no qual o conjunto das estrelas fixas é visto sem rotação e sem aceleração translacional. Esta equação de movimento nesta forma deve ser aplicada no referencial das estrelas fixas quando a seguinte condição for satisfeita:

$$a_{mf} \approx a_r > a_t \gg a_s \ . \tag{8.27}$$

Neste caso podemos dizer que o conjunto de galáxias distantes está essencialmente sem aceleração em relação ao referencial das estrelas fixas. É então possível e conveniente especificar os movimentos do corpo de prova em relação às estrelas fixas ao invés de referi-los às galáxias distantes.

No caso em que $\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} = 0$ resulta da Eq. (8.25) que o corpo de prova vai se mover em relação à superfície da Terra com uma velocidade constante. Se precisamos de uma aproximação melhor, concluímos que neste caso de força anisotrópica resultante nula, a Eq. (8.26) vai levar à conclusão de que o corpo de prova vai se mover com uma velocidade constante em relação ao referencial das estrelas fixas. Uma aproximação ainda melhor utilizando a Eq. (8.22) leva à conclusão de que o corpo de prova vai se mover neste caso com uma velocidade constante em relação ao referencial das galáxias distantes ou ao referencial universal.

Fica então claro agora o significado da afirmação de Mach de que "*Permaneço até o dia de hoje como a única pessoa que insiste em referir a lei de inércia à Terra e, no caso de movimentos de grande extensão espacial e temporal, às estrelas fixas.*" Em seu tempo a existência das galáxias externas ainda não era conhecida, mas o conteúdo de sua afirmação é o mais importante. O fato relevante obtido com a mecânica relacional (que é completamente coerente com esta afirmação de Mach) é que a lei da inércia foi derivada agora como tendo sentido apenas quando se referindo ao movimento dos corpos de prova em relação a corpos materiais observáveis, seja a Terra, as

estrelas fixas ou as galáxias distantes.

Discutimos agora as Eqs. (8.13) e (8.20). Elas também podem ser escritas como $R_o^2 = 3c^2/2\pi\xi G\rho_o$ ou $R_o^2 = 3c^2/4\pi\xi G\rho_o$, onde $R_o = c/H_o$ é o chamado raio do universo. Se o universo está se expandindo, R_o será uma função do tempo. Isto significa que $c^2/\xi G\rho_o$ também será uma função do tempo. Mas todas estas idéias de expansão do universo, do big-bang etc. surgiram de se assumir que a lei de Hubble do desvio da luz das galáxias em direção ao vermelho ($\triangle\lambda/\lambda_o \approx rH_o/c$) é devido a um efeito Doppler relacionado com a recessão entre as galáxias.

Nosso ponto de vista, contudo, é de que o desvio para o vermelho cosmológico (relacionado com a lei de Hubble) é devido a algum tipo de efeito chamado usualmente na literatura de "luz cansada" e não devido a um efeito Doppler. Ou seja, achamos que este desvio para o vermelho tem sua origem numa interação física entre a luz das galáxias e o meio intergaláctico. Isto é, acreditamos que o principal responsável por este desvio é a perda progressiva da energia do fóton à medida em que ele vai interagindo com o meio intergaláctico. Com esta suposição deriva-se facilmente a lei de Hubble sem ter de se impor que ela seja devido a um efeito Doppler, [Ass92f]. Ainda não estamos certos qual o tipo de mecanismo está atuando neste caso (interação fóton-fóton, colisão inelástica entre fótons e elétrons livres ou entre fótons e átomos ou moléculas etc.). Apesar disto já exploramos esta possibilidade em diversos artigos como: [Ass92f], [Ass92e], [Ass93c], [NA95] e [AN95b]. Nestes artigos se encontram várias referências adicionais de diversos outros autores trabalhando ao longo das mesmas linhas de trabalho. Nosso trabalho em seus aspectos principais é uma continuação do que foi feito por Regener, Walther Nernst, Finlay-Freundlich, Max Born e Louis de Broglie sobre uma cosmologia de equilíbrio sem expansão: [Reg33] (tradução para o inglês em [Reg95]), [Ner37] e [Ner38] (traduções para o inglês em [Ner95a] e [Ner95b]), [FF53], [FF54a], [FF54b], [Bor53], [Bor54] e [dB66]. Como não há expansão neste modelo, ele não necessita de uma criação contínua de matéria, como acontecia no modelo de estado estacionário de Hoyle, Narlikar e Gold (steady-state cosmology). Nosso modelo é o de um universo em equilíbrio dinâmico sem expansão e sem criação contínua

de matéria. Deve ser enfatizado aqui que Nernst (pai da terceira lei da termodinâmica e prêmio Nobel) assim como L. de Broglie (um dos fundadores da mecânica quântica e prêmio Nobel) nunca aceitaram a idéia do big-bang, preferindo sempre um modelo de universo em equilíbrio dinâmico sem expansão. Concordamos plenamente com eles neste sentido. Para uma análise de desenvolvimentos recentes e para enfoques diferentes sobre estes modelos de um universo em equilíbrio dinâmico sem expansão, ver: [Reb77], [Reb86], [MR89], [Gho84], [Gho86], [Gho93], [LaV86], [Gen88], [Jaa91], [Mon96] etc.

O próprio Hubble tinha dúvidas de que o desvio para o vermelho cosmológico era devido a um efeito Doppler e sugeriu que este desvio podia ser devido a um novo princípio da natureza: [Hub37], págs. 30, 63 e 66; [Hub42] e [Hub58], págs. 88-89, 121-123, 193 e 197.

É importante discutir aqui brevemente sobre a radiação cósmica de fundo, CBR, que é uma radiação do tipo da de um corpo negro com uma temperatura característica de 2,7 K. Um mapa celeste da CBR pode ser encontrado em [LVES85] e [LV86]. Em geral afirma-se que ela é uma prova do big-bang e da expansão do universo já que havia sido prevista por Gamow e por seus colaboradores antes de sua descoberta em 1965 por Penzias e Wilson, [PW65]. Fizemos uma pesquisa bibliográfica e encontramos algo bem diferente do que em geral se afirma. Nossos principais trabalhos sobre isto encontram-se em [Ass92e], [Ass93c], [AN95a] e [AN95b]. O ponto principal é que as previsões publicadas desta temperatura que encontramos feitas por Gamow e colaboradores (baseadas no big-bang) foram de 5 K em 1948, > 5 K em 1949, 7 K em 1953 e 50 K em 1961: [AH48], [AH49], [FF54b] e [Gam61]. Ou seja, foram sempre crescentes e cada vez se afastando mais do valor encontrado mais tarde! Por outro lado encontramos diversas previsões ou estimativas desta temperatura baseadas num universo estacionário e sem expansão, sempre variando entre 2 K e 6 K. Além disto uma das estimativas foi de 1896, portanto anterior ao nascimento de Gamow em 1904! São elas: $5\ K < T < 6\ K$ (Guilhaume em 1896), $3,1\ K$ (Eddington em 1926), $2,8\ K$ (Regener e Nernst entre 1933 e 1938), $2,3\ K$ (Herzberg em 1941 baseado em medidas de McKellar) e $1,9\ K < T < 6,0\ K$ (Finlay-Freundlich e Max Born entre 1953 e 1954): [Gui96] (tradução parcial para o inglês

em [AN95a]), [Edd88], [Reg33] (tradução para o inglês em [Reg95]), [Ner37] (tradução para o inglês em [Ner95a]), [Ner38] (tradução para o inglês em [Ner95b]), [Her41, pág. 496], [FF53], [FF54a], [FF54b], [Bor53] e [Bor54]. A conclusão é que a descoberta da CBR por Penzias e Wilson em 1965 é um fator decisivo em favor do modelo de um universo em equilíbrio dinâmico sem expansão e contra o modelo do big-bang.

Nosso modelo cosmológico é aquele de um universo homogêneo sem fronteiras espaciais ou temporais. Por este motivo preferimos integrar até o infinito e utilizar as Eqs. (8.15) e (8.20) ao invés da (8.13). Neste caso R_o é visto como um comprimento característico para as interações gravitacionais ao invés de significar o raio ou tamanho do universo. Para nós não apenas R_o mas todas as outras grandezas como c, ξ, G e ρ_o são de fato constantes e não funções do tempo.

Resumimos aqui as principais conseqüências diretas da mecânica relacional quando a identificamos com a mecânica newtoniana:

A) *Derivamos* equações similares à primeira e segunda leis do movimento de Newton.

B) *Derivamos* a proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais.

C) *Derivamos* o fato de que o melhor sistema inercial de que dispomos é aquele das galáxias distantes, isto é, derivamos o fato observacional de que $\vec{\omega}_k = \vec{\omega}_d$.

D) *Derivamos* a energia cinética como mais uma energia de interação, neste caso de origem gravitacional entre o corpo de prova e o universo distante, quando há um movimento entre ambos.

E) *Derivamos* o fato de que todas as forças fictícias da mecânica newtoniana são de fato forças reais como todas as outras forças usuais. Neste caso, são forças de origem gravitacional agindo entre o corpo de prova e o universo distante acelerado em relação a ele.

F) *Derivamos* uma relação entre G, H_o e ρ_o, a saber, $3H_o^2 =$ 2 a $4\pi\xi G\rho_o$, com $\xi = 6$ como veremos depois. Já se sabia que esta relação era válida há muito tempo, sem se encontrar uma explicação convincente para ela.

G) Obtivemos que as forças "inerciais" $\vec{F}_{Im}$ têm o mesmo valor

numérico em todos os sistemas de referência, embora não necessariamente a mesma forma.

8.4 Visões de Mundo Ptolomaica e Copernicana

Como vimos anteriormente, Leibniz e Mach enfatizaram que o sistema geocêntrico de Ptolomeu e o sistema heliocêntrico de Copérnico são igualmente válidos e corretos. Com a mecânica relacional conseguimos implementar isto quantitativamente, mostrando a equivalência entre as duas visões de mundo.

Vamos considerar movimentos sobre a superfície da Terra e no sistema solar tais que possamos desprezar a aceleração do sistema solar em relação ao referencial das galáxias distantes (com um valor típico de 10^{-10} m/s^2). Além do mais, como a massa do Sol é muito maior do que a massa dos planetas, podemos numa primeira aproximação desprezar o movimento do Sol quando comparado com o movimento dos planetas (ambos os movimentos em relação às estrelas fixas). Podemos então dizer que o Sol está essencialmente em repouso em relação às estrelas fixas, enquanto que a Terra e os outros planetas se movem em relação a elas.

Inicialmente consideramos a visão de mundo de Copérnico. Consideramos aqui o Sol no centro do universo enquanto que a Terra e os planetas orbitam ao redor dele (para simplificar vamos supor que em órbitas circulares) e giram ao redor de seus eixos em relação ao referencial das estrelas fixas. A mecânica relacional pode ser aplicada neste referencial com enorme sucesso na forma da Eq. (8.26). Apesar da atração gravitacional do Sol, a Terra e os outros planetas não diminuem suas distâncias ao Sol porque têm uma aceleração em relação às estrelas fixas. A matéria distante no universo exerce uma força $-m_g\vec{a}_{mf}$ sobre os planetas acelerados que os mantêm em suas órbitas ao redor do Sol. A rotação diurna da Terra ao redor de seu eixo em relação às estrelas fixas explica sua forma achatada, com uma distância menor entre os pólos do que no equador de leste a oeste. Explica-se a experiência do pêndulo de Foucault dizendo que o plano de oscilação permanece fixo em relação às estrelas fixas, etc.

Na visão de Ptolomeu, a Terra é considerada em repouso no centro

do universo, sem rotação. O Sol, os outros planetas e as estrelas fixas giram ao seu redor. Na mecânica relacional esta rotação da matéria distante em relação à Terra vai gerar a força (8.12) no referencial da Terra tal que a equação de movimento vai ficar na forma da Eq. (8.23). Agora a atração gravitacional exercida pelo Sol sobre a Terra é contrabalançada por uma força centrífuga real de origem gravitacional exercida pela matéria distante girando (com uma componente de período anual) ao redor da Terra. Por este motivo a Terra pode permanecer em repouso e a uma distância essencialmente constante do Sol. A rotação da matéria distante (com uma componente de período diurno) ao redor da Terra gera uma força centrífuga gravitacional real que achata a Terra nos pólos. O pêndulo de Foucault é explicado por uma força de Coriolis real agindo sobre as massas que se movem na superfície da Terra na forma de $-2m_g\vec{v}_{me} \times \vec{\omega}_{Ue}$, onde $\vec{v}_{me}$ é a velocidade do corpo de prova em relação à Terra e $\vec{\omega}_{Ue}$ é a rotação angular da matéria distante ao redor da Terra. O efeito desta força é o de manter o plano de oscilação do pêndulo girando em relação à superfície da Terra junto com a rotação das estrelas fixas em relação à Terra, etc.

Na verdade, qualquer outro sistema de referência é igualmente válido como estes dois. Qualquer pessoa ou sistema de referência pode se considerar realmente em repouso enquanto que todo o universo move-se ao redor desta pessoa de acordo com sua vontade. E isto não apenas cinematicamente como sempre se soube, mas também dinamicamente. Todas as forças locais atuando sobre a pessoa serão contrabalançadas pela força exercida pelo universo distante, tal que sua própria velocidade e aceleração sejam sempre nulas. Por exemplo, considere uma pedra caindo livremente no vácuo sobre a superfície da Terra devido a seu peso $\vec{P}$. No referencial da pedra ela vai sempre permanecer em repouso, enquanto que a Terra e o universo distante são acelerados para cima (ou seja, na direção da Terra apontando para a pedra) tal que a força gravitacional $\vec{P}$ exercida pela Terra sobre a pedra seja contrabalançada pela força gravitacional exercida pelas galáxias distantes sobre a pedra com um valor $m_g\vec{a}_{Um}$ tal que $\vec{P} + m_g\vec{a}_{Um} = 0$, onde $\vec{a}_{Um}$ é a aceleração do universo distante em relação à pedra.

Isto é, a mecânica relacional implementa quantitativamente e dinamicamente o velho objetivo de tornar todos os sistemas de referência igualmente válidos, corretos e verdadeiros. A forma da força exercida pela matéria distante sobre um corpo de prova pode ser diferente em diferentes sistemas de referência, mas não o valor numérico ou a direção desta força em relação a outras massas. Neste sentido pode ser mais prático, simples ou matematicamente conveniente considerar um certo sistema de referência como o preferido em relação a outros para tratar um certo problema, mas na verdade todos os outros referenciais vão levar exatamente nas mesmas conseqüências dinâmicas (muito embora possa ser mais difícil ou mais trabalhoso fazer as contas e chegar na resposta final).

Uma conseqüência bonita e marcante da mecânica relacional é que se mostrou serem dinamicamente equivalentes todos os movimentos cinematicamente equivalentes. Podemos afirmar que as estrelas e galáxias estão em repouso enquanto que a Terra gira ao redor de seu eixo com um período de um dia, ou que a Terra está em repouso enquanto que as estrelas e galáxias giram na direção oposta em relação à Terra com o mesmo período de um dia. Nestes dois casos cinematicamente equivalentes resulta como uma conseqüência dinâmica da mecânica relacional que a Terra ficará achatada nos pólos. Nenhuma outra teoria da mecânica já proposta conseguiu implementar quantitativamente esta conseqüência. E isto apesar de sempre ter se desejado derivar este resultado atraente e elegante por motivos filosóficos, estéticos e de simplicidade matemática. O que estava faltando era uma lei de força relacional como a de Weber.

8.5 Implementação das Idéias de Einstein

Vimos, na Seção 7.3, que em 1922 Einstein apontou quatro conseqüências que deviam ser implementadas em qualquer teoria incorporando o princípio de Mach:

1. A inércia de um corpo deve aumentar se se acumulam na sua vizinhança massas ponderáveis.

2. Um corpo deve sofrer uma força aceleradora quando massas vizinhas são aceleradas; a força deve ser do mesmo sentido que a aceleração.

3. Um corpo oco animado de um movimento de rotação deve produzir no seu interior um 'campo de Coriolis' que faz com que corpos em movimento sejam desviados no sentido da rotação; deve ainda produzir um campo de forças centrífugas radial.

4. Um corpo num universo vazio não deve ter inércia; ou toda a inércia de qualquer corpo tem de vir de sua interação com outras massas no universo.

Estas quatro conseqüências não são completamente implementadas na teoria da relatividade geral de Einstein, como já analisamos. Mostramos aqui que todas elas são exatamente derivadas na mecânica relacional, ver [Ass93b] e [Ass94], Cap. 7.

Começamos com a primeira conseqüência. Vamos supor um corpo de massa gravitacional m_g interagindo com distribuições anisotrópicas de matéria e com a distribuição isotrópica de galáxias distantes ao seu redor. A força exercida por esta distribuição anisotrópica de matéria composta de N corpos é representada por $\vec{F}_{Am} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm}$, Figura 8.6.

Como já vimos, neste caso a equação de movimento da mecânica relacional no referencial U é dada pela Eq. (8.22), a saber:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \vec{a}_{mU} = 0 \ , \tag{8.28}$$

onde $\vec{a}_{mU}$ é a aceleração de m_g em relação ao sistema de referência universal (aquele em relação ao qual o conjunto das galáxias distantes é visto sem aceleração angular ou translacional, em repouso). Isto é análogo à segunda lei de Newton com o corpo de prova tendo uma massa inercial m_i dada por $m_i = m_g$.

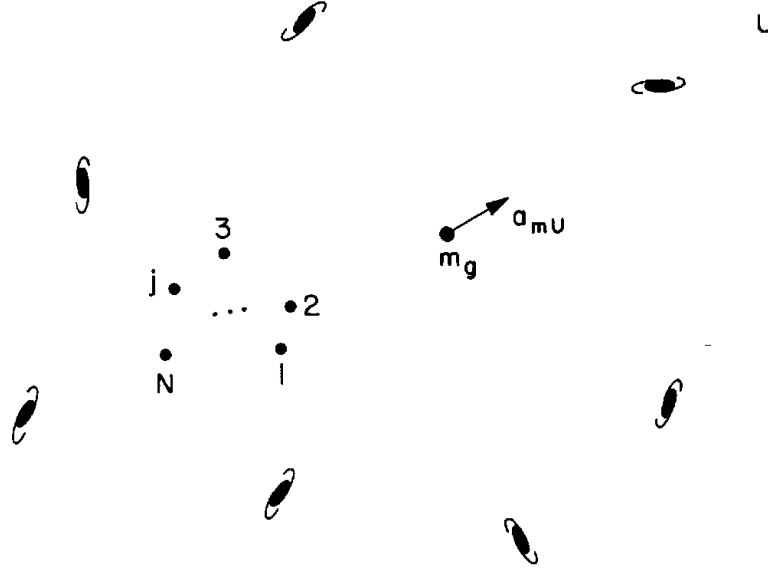



Figura 8.6: Corpo de prova interagindo com outros corpos e galáxias.

Cercamos agora o corpo de prova por uma casca esférica em repouso e sem rotação em relação ao referencial universal U. Supomos que esta casca tem um raio R, uma espessura dR e uma densidade de matéria gravitacional isotrópica ρ_g. A massa desta casca é dada então por $M_g = 4\pi R^2 dR \rho_g$, Figura 8.7.

Aplicamos então neste segundo caso o terceiro postulado da mecânica relacional, o princípio de equilíbrio dinâmico, que afirma que a soma de todas as forças atuando sobre m_g é nula. Aplicando este princípio juntamente com a Eq. (8.28) e o resultado (8.8) para a força gravitacional exercida por esta casca esférica sobre m_g resulta em:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - G\frac{\xi}{3c^2}\frac{m_g M_g}{R}\vec{a}_{mU} - m_g \vec{a}_{mU} = 0 \ . \qquad (8.29)$$

Esta equação também pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} = m_g \left(1 + G \frac{\xi}{3c^2} \frac{M_g}{R} \right) \vec{a}_{mU} \ . \tag{8.30}$$

E isto é análogo à segunda lei do movimento de Newton com o corpo de prova tendo uma massa inercial efetiva dada por:

$$m_i = m_g \left(1 + G \frac{\xi}{3c^2} \frac{M_g}{R} \right) \ .$$

Isto mostra que a inércia de um corpo tem de crescer quando matéria ponderável é colocada ao seu redor, como requer o princípio de Mach e como corretamente apontado por Einstein. Este fato é implementado na mecânica relacional mas não na teoria da relatividade geral de Einstein.

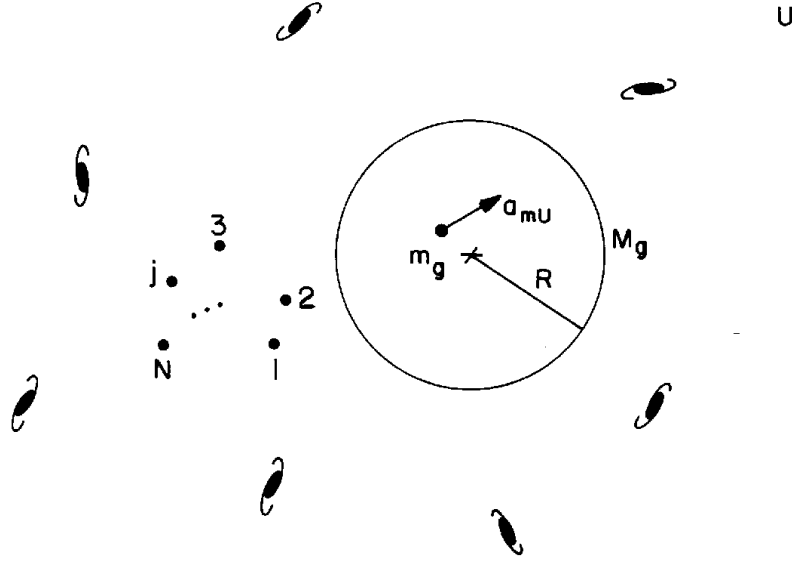



Figura 8.7: Mesma situação anterior mas agora com o corpo de prova cercado por uma casca esférica.

Analisamos agora a segunda conseqüência. Consideramos para simplificar a análise um movimento unidimensional. Temos duas massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2} interagindo por uma força de Weber,

Eq. (8.4). Consideramos os corpos 1 e 2 movendo-se ao longo do eixo x, com $x_1 < x_2$, tal que $\hat{r}_{12} = - \ \hat{x}$, ver a Figura 8.8.

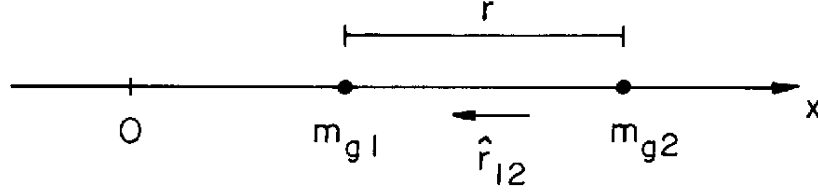



Figura 8.8: Duas massas interagindo ao longo do eixo x.

Simplificamos a notação utilizando que $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |x_1 - x_2| \equiv r$. Além disso, $\vec{r}_{12} = (x_1 - x_2)\hat{x}$, $\vec{v}_{12} = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\hat{x}$ e $\vec{a}_{12} = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)\hat{x}$. Isto significa que $\dot{r}_{12} = \hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12} = -(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ e também que $r_{12}\ddot{r}_{12} = \vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} = (x_1 - x_2)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)$. A força exercida por 2 sobre 1 fica então:

$$\vec{F}_{21} = + \ G m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{x}}{r^2} \left\{ 1 - \frac{\xi}{c^2} \left[\frac{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{2} - (x_1 - x_2)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \right] \right\} . \tag{8.31}$$

Isto significa que se m_{g2} é acelerada para a direita ($\ddot{x}_2 > 0$), vai haver uma componente da força atuando sobre m_{g1} proporcional a $\ddot{x}_2$, a saber:

$$\frac{G m_{g1} m_{g2} \xi (x_2 - x_1) \ddot{x}_2 \hat{x}}{c^2 r^2} .$$

Como $\xi > 0$ e $(x_2 - x_1) > 0$, esta força aponta para a direita, isto é, na mesma direção da aceleração de m_{g2}. Se m_{g2} fosse acelerada para a esquerda, também apareceria uma força sobre 1 apontando para a esquerda e proporcional a $\ddot{x}_2$.

Isto é, mostramos que na mecânica relacional um corpo sofre uma força aceleradora quando massas próximas ou distantes são aceleradas. Além disto, mostramos que esta força está na mesma direção que a aceleração das massas. E para implementar o princípio de

Mach era necessário tudo isto, como corretamente apontado por Einstein. A simplicidade da derivação deste efeito na mecânica relacional quando comparada com a derivação complexa e confusa baseada na relatividade geral é um bônus extra da teoria.

Vamos analisar agora a terceira conseqüência. Suponha que estamos em um sistema de referência S no qual há uma casca esférica de massa gravitacional M_g com seu centro em repouso em relação a S e coincidindo com sua origem O. Além disto, suponha que esta casca esférica está girando em relação a este referencial com uma velocidade angular $\vec{\omega}_{MS}$. A massa gravitacional da casca é dada por $M_g = 4\pi R^2 dR\rho_g$, onde R é seu raio, dR sua espessura e ρ_g sua densidade de massa gravitacional. Suponha também que há um corpo de prova dentro da casca movendo-se em relação a este referencial S. A força gravitacional exercida pela casca sobre o corpo de prova na mecânica relacional é dada pela Eq. (8.8):

$$d\vec{F} = -G\frac{\xi}{3c^2}\frac{m_g M_g}{R}\left[\vec{a}_{mS}\right.$$

$$\left. + \vec{\omega}_{MS} \times (\vec{\omega}_{MS} \times \vec{r}_{mS}) + 2\vec{v}_{mS} \times \vec{\omega}_{MS} + \vec{r}_{mS} \times \frac{d\vec{\omega}_{MS}}{dt}\right] .$$

Isto mostra que na mecânica relacional um corpo oco girando gera dentro dele uma força de Coriolis proporcional a $2m_g\vec{v}_{mS} \times \vec{\omega}_{MS}$ que desvia os corpos em movimento no sentido desta rotação e uma força radial centrífuga proporcional a $m_g\vec{\omega}_{MS} \times (\vec{\omega}_{MS} \times \vec{r}_{mS})$. Isto está completamente de acordo com o princípio de Mach. Como vimos, o efeito análogo na relatividade geral foi derivado por Thirring, mas com coeficientes errados em frente dos termos de Coriolis e centrífugo (isto é, com coeficientes não observados experimentalmente). Além disso, a relatividade geral prevê efeitos espúrios (as forças axiais) que nunca foram encontrados em qualquer experiência.

Analisamos agora a quarta conseqüência. Ela também segue imediatamente da mecânica relacional observando-se que a inércia de qualquer corpo, ou seja, a força $-m_g\vec{a}_{mU}$, foi obtida supondo-se a contribuição das galáxias distantes. Se fizermos estas galáxias desaparecerem, o que é análogo a fazer $\rho_o = 0$ nas Eqs. (8.8), (8.13) e

(8.15), não vão mais haver forças similares ao termo newtoniano $m_i\vec{a}$. Isto é, a inércia do corpo vai desaparecer.

Uma outra maneira de observar esta conseqüência na mecânica relacional é que todas as forças nesta teoria são baseadas em interações entre dois corpos materiais. Ou seja, não há força entre qualquer corpo e o "espaço." Fica então sem sentido falar do movimento de um único corpo num universo completamente vazio de outros corpos materiais. O sistema mais simples que podemos considerar é aquele composto de duas partículas.

Como já vimos, isto não ocorre na relatividade geral. Nesta teoria de Einstein, um corpo num universo vazio de outros corpos ainda mantém toda sua inércia.

Capítulo 9

Aplicações da Mecânica Relacional

Neste Capítulo apresentamos algumas aplicações da mecânica relacional. Quando consideramos o peso de um corpo sobre a superfície da Terra, ele não é mais dado simplesmente por $\vec{P} = m_g \vec{g}$, com $\vec{g} = -GM_{gt}\hat{r}/R_t^2$, já que esta expressão foi obtida com a lei de Newton da gravitação. Na mecânica relacional substituímos esta lei por uma força de Weber para a gravitação. Para saber a força exercida pela Terra sobre um corpo de prova movendo-se em sua superfície precisamos integrar a Eq. (8.10) para toda a Terra. Mas neste Capítulo só vamos considerar situações onde $v^2/c^2 \ll 1$ e $ra/c^2 \ll 1$, v sendo a velocidade do corpo de prova em relação à Terra, r sua distância ao centro da Terra e a sua aceleração em relação à Terra. Em geral analisaremos os problemas no referencial da Terra, tal que $\vec{\omega} = 0$.

Com estas aproximações a força exercida pela Terra sobre um corpo de prova movendo-se sobre sua superfície de acordo com a lei de Weber vai se reduzir ao resultado newtoniano, a saber: $\vec{P} = m_g \vec{g}$, com $\vec{g} = -GM_{gt}\hat{r}/R_t^2$. O valor aproximado de g próximo a superfície terrestre é $9,8\ m/s^2$, apontando radialmente para o centro da Terra.

9.1 Movimento Retilíneo Uniforme

A equação do movimento da mecânica relacional num sistema de referência em relação ao qual o conjunto das galáxias distantes está em repouso e sem rotação é dado pela Eq. (8.22):

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \vec{a}_{mU} = 0. \tag{9.1}$$

Se $\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} = 0$ e observando que $m_g \neq 0$ esta equação leva a: $\vec{a}_{mU} = 0$. Isto é,

$$\vec{v}_{mU} = \frac{d\vec{r}_{mU}}{dt} = constante\ .$$

A diferença em relação à mecânica newtoniana é que a velocidade $\vec{v}_{mU}$ que aparece aqui é a velocidade da partícula teste m_g em relação a este sistema de referência definido pelas galáxias distantes. Obviamente se a velocidade do corpo de prova é constante neste referencial, ela também vai ser constante em qualquer outro sistema de referência que se move com uma velocidade constante em relação ao referencial universal.

Se estamos desprezando acelerações da ordem de 10^{-10} m/s^2 (a aceleração típica do sistema solar ao redor do centro de nossa galáxia em relação ao referencial das galáxias distantes) podemos dizer que o corpo de prova vai se mover com uma velocidade constante em relação ao referencial das estrelas fixas ou em relação a qualquer outro sistema de referência que se move com uma velocidade linear constante em relação ao conjunto das estrelas fixas. Se estamos desprezando acelerações da ordem de $10^{-2} - 10^{-3}$ m/s^2 (as acelerações centrípetas típicas surgindo da rotação e da translação da Terra ao redor do Sol em relação ao referencial das estrelas fixas) podemos dizer que o corpo de prova vai se mover com uma velocidade constante em relação à Terra ou em relação a qualquer outro referencial que se move com velocidade linear constante em relação à Terra.

9.2 Força Constante

Consideramos agora situações nas quais a Eq. (8.24) é válida, de tal forma que só precisamos considerar a aceleração do corpo de prova em relação à superfície terrestre. Nesta aproximação a aceleração do corpo de prova em relação ao conjunto das galáxias distantes será essencialmente a mesma que sua aceleração em relação ao referencial das estrelas fixas, ou em relação à Terra: $\vec{a}_{mU} \approx \vec{a}_{mf} \approx \vec{a}_{me}$. A equação de movimento é então dada por (8.25):

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \vec{a}_{me} = 0 \ . \tag{9.2}$$

Analisamos nesta aproximação uma situação em que $\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} = \vec{F}_o = constante$. A aplicação da Eq. (9.2) leva a:

$$\vec{a}_{me} = \frac{d\vec{v}_{me}}{dt} = \frac{\vec{F}_o}{m_g} = constante \ . \tag{9.3}$$

Mais uma vez a diferença em relação à mecânica newtoniana é que esta não é a aceleração do corpo de prova em relação ao espaço absoluto nem em relação a referenciais inerciais, mas sim em relação à superfície terrestre, ou em relação às estrelas fixas, ou em relação ao referencial universal das galáxias distantes (nesta aproximação sendo considerada aqui onde é válida a Eq. (8.24)).

Se estamos num referencial S' no qual o universo como um todo (o conjunto das galáxias distantes) tem uma aceleração translacional $\vec{a}_{US'}$ em relação a S', sem ter nenhuma rotação, a equação de movimento da mecânica relacional fica na forma da Eq. (8.18). Como $\Phi = 1$ esta equação se reduz a:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g(\vec{a}_{mS'} - \vec{a}_{US'}) = 0 \ . \tag{9.4}$$

No caso de uma força anisotrópica constante, $\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} = \vec{F}_o = constante$, obtemos:

$$\vec{F}_o + m_g\vec{a}_{US'} - m_g\vec{a}_{mS'} = 0 \ . \tag{9.5}$$

Aqui $\vec{a}_{mS'}$ é a aceleração do corpo de prova neste referencial S'. Se este referencial está fixo com o corpo de prova, $\vec{a}_{mS'} = 0$. Isto significa que a força constante $\vec{F}_o$ é contrabalançada pela força gravitacional exercida pelo universo distante que está sendo acelerado em relação a S', ou seja, $\vec{F}_o = -m_g\vec{a}_{US'}$.

9.2.1 Queda Livre

Estudamos agora a queda livre de um corpo como uma maçã sobre a superfície da Terra, desprezando a resistência do ar. Vamos desprezar a aceleração da Terra em relação ao referencial das galáxias distantes quando comparada com a aceleração da maçã, devido ao fato de a maçã ter uma massa muito menor do que a da Terra.

Se a força constante é o peso do corpo de prova surgindo da

atração gravitacional da Terra próximo a sua superfície, temos $\vec{F}_o = m_g\vec{g}$, onde $\vec{g} = -GM_{gt}\hat{r}/R_t^2$ é o campo gravitacional da Terra. Utilizando este resultado na Eq. (9.3) resulta em:

$$\vec{a}_{me} = \frac{\vec{F}_o}{m_g} = \frac{m_g\vec{g}}{m_g} = \vec{g} = constante \ .$$

Isto explica claramente o fato observacional obtido por Galileo de que todos os corpos caem no vácuo com a mesma aceleração, não interessando seus pesos, formas, composições químicas etc. Isto surge do fato de que a força $-m_g\vec{a}_{me}$ da mecânica relacional é uma força real devido a uma interação *gravitacional* do corpo de prova com as massas distantes do cosmo. Assim, a massa que aparece em $-m_g\vec{a}_{me}$ é a mesma massa que aparece no peso do corpo de prova devido a sua interação gravitacional com a Terra, a saber: $\vec{P} = m_g\vec{g}$. A explicação deste fato notável que tanto intrigou a Galileo, Newton, Einstein e muitos outros é óbvia na mecânica relacional. A explicação que se obtém aqui é muito simples e elegante. Não precisamos postular esta proporcionalidade, como havia sido feito na relatividade geral. Ao invés de postulá-la sem obter uma melhor compreensão do fenômeno, este resultado passa a ser *derivado* na mecânica relacional. Adquirimos então uma compreensão completa do fato, o que abre nossas mentes para muitas outras possibilidades.

A representação gráfica das forças neste caso é dada na Figura 9.1. As acelerações neste referencial da Terra estão representadas na Figura 9.2.

Há ação e reação na interação gravitacional entre a Terra e o corpo de prova, assim como há ação e reação na interação gravitacional entre o universo distante e o corpo de prova (chamamos esta interação aqui de atração inercial para enfatizar a identificação e novo significado da mecânica newtoniana). Isto é, o peso do corpo de prova tem seu par numa força oposta agindo sobre a Terra, enquanto que a força gravitacional exercida pelo universo distante sobre m_g, $-m_g\vec{a}_{me}$, tem seu par numa força oposta agindo sobre o universo distante (distribuída entre todas as galáxias). Na mecânica newtoniana, as forças inerciais como $-m_i\vec{a}$ não estavam associadas com nenhuma força oposta agindo sobre qualquer outro corpo. Na mecânica relacional, as forças que atuam sobre o corpo, como seu peso ($m_g\vec{g}$) e como a

força exercida pelo universo distante sobre o corpo de prova acelerado ($-m_g\vec{a}_{me}$), se contrabalançam uma a outra, gerando a aceleração do corpo de prova em relação ao universo distante.

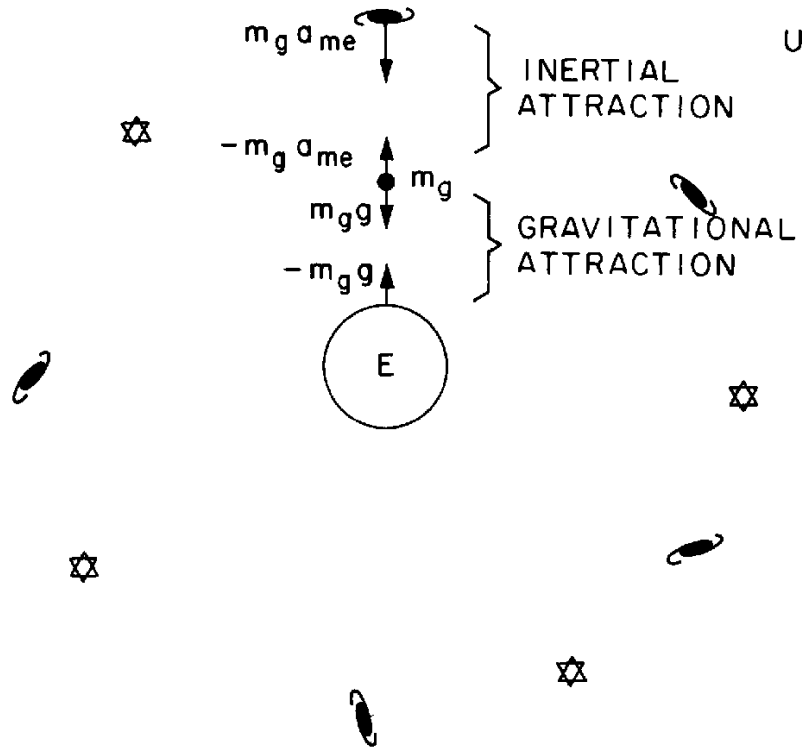



Figura 9.1: Forças no caso de queda livre, analisadas da Terra.

O fato de que as forças inerciais ($m_i\vec{a}$, centrífuga, Coriolis etc.) da mecânica clássica não satisfazem à lei de ação e reação foi apontado claramente por Einstein no Preâmbulo do livro *Conceitos de Espaço*, de Max Jammer: "(...) o espaço (como um sistema inercial) age sobre todos os corpos materiais, enquanto que estes não exercem qualquer reação sobre o espaço" [Jam69, pág. xiv]. Isto pode ser visto claramente no caso da experiência do balde. Se o balde e a água estão parados ou em movimento retilínio uniforme em relação ao espaço absoluto newtoniano, a superfície da água é plana. Quando a água está

girando em relação ao espaço sua superfície livre fica curva subindo em direção às paredes do balde. Pode-se dizer então que o espaço absoluto (ou que o referencial inercial) está atuando sobre a água empurrando-a para as paredes do balde. Por outro lado não acontece nada com o espaço absoluto, isto é, a água girando não exerce qualquer força de reação no espaço. Já na mecânica relacional isto não acontece mais. Todas as forças ditas inerciais atuando sobre o corpo são agora causadas por uma aceleração do corpo em relação ao universo distante e há uma reação exercida por este corpo no universo distante (distribuída entre todas as galáxias).

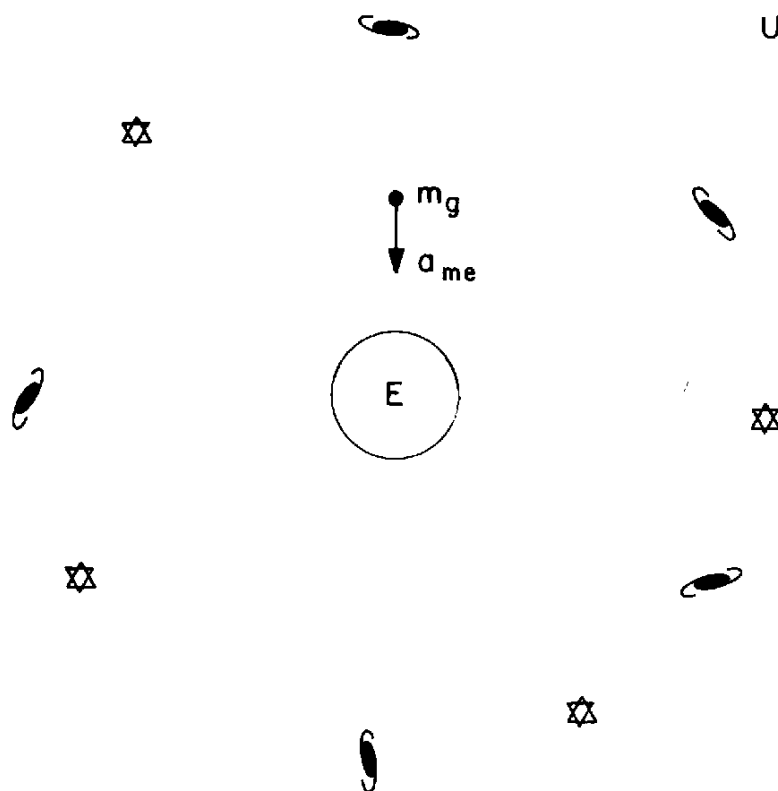



Figura 9.2: Acelerações como vistas na Terra.

Se estamos no referencial S' do corpo de prova, tal que ele não se mova neste referencial (apenas a Terra se aproxime dele), vem de (9.5) com $\vec{a}_{mS'} = 0$ e lembrando que $\vec{F}_o = m_g\vec{g}$:

$$m_g\vec{g} + m_g\vec{a}_{US'} = 0 \ .$$

As forças neste caso estão representadas na Figura 9.3, enquanto que as acelerações neste referencial S' do corpo de prova estão representadas na Figura 9.4.

Novamente vemos ação e reação entre a Terra e o corpo de prova, o mesmo ocorrendo entre o corpo de prova e o universo distante. Mas agora a interpretação é um pouco diferente. Dizemos que o peso do corpo é contrabalançado por uma força gravitacional apontando para cima (ou seja, na direção da Terra para o corpo) exercida pelo universo distante sendo acelerado nesta direção, de tal forma que o corpo de prova não se move em seu próprio referencial.

Vale a pena analisar aqui o que aconteceria na mecânica relacional se mantivéssemos as massas da Terra e do corpo de prova constantes, mas dobrássemos a massa ou densidade das galáxias externas. De acordo com as Eqs. (8.13) e (8.15), os valores de Φ ou de A dobrariam. Isto significa que as Eqs. (8.16) e (8.17) só permaneceriam válidas com $\sum_{j=1}^{N} U_{jm} \neq 0$ ou $\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} \neq 0$ se os colchetes tiverem seus valores diminuídos pela metade pois estamos supondo que m_g, $\sum_{j=1}^{N} U_{jm}$ e $\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm}$ não se alteraram. No caso de queda livre isto significa a aceleração do corpo de prova em direção ao centro da Terra. Isto é, se dobramos a quantidade de galáxias no universo, deixando inalteradas a Terra e o corpo de prova, a aceleração de queda livre cai para a metade de seu valor atual. Da mesma forma se aniquilássemos metade das galáxias ou se esta metade deixasse de existir, dobraria a aceleração de queda livre.

Vamos ver tudo isto em detalhes. A equação de movimento é dada por (8.17) ou por uma equação análoga com A em vez de Φ. No referencial da Terra e valendo a aproximação (8.24) vem que $\vec{\omega}_{Ue} \approx 0$, $d\vec{\omega}_{Ue}/dt \approx 0$ e $\vec{a}_{mS} \approx \vec{a}_{me}$. Além disto a força exercida pela Terra sobre o corpo de prova é dada em baixas velocidades por $\vec{F}_{jm} = -GM_{gt}m_g\hat{r}/R_t^2 = m_g\vec{g}$, onde $g = GM_{gt}/R_t^2 = 9,8\ ms^{-2}$ é o campo gravitacional da Terra. Com tudo isto vem que (8.17) fica na forma

$m_g\vec{g} - \Phi m_g \vec{a}_{me} = 0$, ou seja, com (8.13):

$$\vec{a}_{me} = \frac{m_g\vec{g}}{\Phi m_g} = -\frac{GM_{gt}\hat{r}/R_t^2}{2\pi\xi G\rho_o/3H_o^2} = -\frac{3H_o^2 M_{gt}}{2\pi\xi\rho_o R_t^2} \ . \tag{9.6}$$

Esta equação mostra que a aceleração de queda livre sobre a superfície da Terra é inversamente proporcional à densidade de matéria no universo. Chegaríamos na mesma conclusão com A ao invés de Φ. Com a densidade atual de aproximadamente 1 átomo de hidrogênio por metro cúbico temos esta aceleração de 9,8 m/s^2. Aumentando a densidade de matéria das galáxias distantes (ou o número de galáxias por unidade de volume), sem alterar a massa da Terra e do corpo que cai, vem que a aceleração de queda deveria diminuir.

Vamos chamar de caso (A) a situação atual em que uma maçã sofre uma aceleração de queda livre na superfície da Terra de $9,8\ m/s^2$. O caso (B) é quando dobramos a massa das galáxias deixando a massa da Terra e da maçã inalteradas. Já o caso (C) é quando deixamos a massa das galáxias constantes e dividimos por dois a massa da Terra e da maçã. Nos três casos mantemos as distâncias entre todos os corpos inalteradas. Estes dois últimos casos são análogos e deveriam levar às mesmas conseqüências. Isto é devido ao fato de que a razão das massas (massa da Terra dividida pela massa da maçã ou das galáxias) é a mesma em (B) e em (C). Só que tanto na mecânica newtoniana quanto na relatividade geral a aceleração de queda no caso (C) passa para $4,9\ m/s^2$, enquanto que no caso (B) ela permanece em $9,8\ m/s^2$. Apenas a mecânica relacional conclui que tanto no caso (B) quanto no (C) a aceleração será de $4,9\ m/s^2$. E isto é o mais intuitivo e o mais filosoficamente aceitável, pois dizer que a massa da Terra e da maçã foram divididas por dois deveria ser análogo a dizer que dobraram as massas de todos os outros corpos do universo. Se este é o caso então as conseqüências dinâmicas deveriam ser as mesmas em (B) e em (C). Somente na mecânica relacional isto acontece. Nestes exemplos, quando afirmamos que as massas da Terra, da maçã ou das galáxias foram divididas por dois ou dobraram, deve-se entender que estamos comparando-as com um corpo padrão (por exemplo, o quilograma-padrão mantido em Paris).

Mais para frente neste livro vamos discutir outras situações hi-

potéticas sobre o que aconteceria na mecânica relacional se aumentássemos ou diminuíssemos a densidade de matéria das galáxias distantes mantendo inalterados a Terra e os corpos sobre sua superfície. A conclusão sobre as conseqüências dinâmicas vai ser sempre baseada em análises deste tipo, mas não vamos apresentar as contas tão explicitamente nos outros casos. Embora não possamos testar nenhuma destas conseqüências pois não temos controle sobre a densidade ou sobre o número de galáxias, estas situações e análises são boas para mostrar as implicações da mecânica relacional e suas diferenças em relação às formulações de Newton e de Einstein. Apesar disto deve ser ressaltado que um efeito análogo ocorreria se envolvêssemos o corpo de prova por uma casca esférica. Isto é, se um corpo de prova em queda livre cai com uma aceleração de $9,8\ m/s^2$ na superfície da Terra, se colocássemos uma casca esférica de vidro ou de concreto ao redor dele, sua aceleração de queda diminuiria. Em princípio isto poderia ser testado no laboratório, mas o efeito é tão pequeno que por enquanto este teste ainda não é conclusivo. Por exemplo, da Eq. (8.30) vem que a aceleração de queda seria dada por

$$a = \frac{g}{1 + G\xi M_g/3c^2R} \ .$$

Com uma casca de raio 1 m tendo uma massa de 100 kg vem que a aceleração de queda mudaria apenas de uma parte em 10^{25}, o que certamente não é detectável no laboratório. Contudo, esta experiência é conceitualmente importante pois nada disto aconteceria com a mecânica newtoniana nem com as teorias da relatividade de Einstein, já que nenhuma delas prevê qualquer influência exercida por uma casca esférica parada em corpos que estão em seu interior.

Se todas as galáxias do universo desaparecessem não teríamos mais a força $-m_g\vec{a}_{mU}$ na Eq. (9.1) e então precisaríamos de tratar de um problema de dois corpos (a Terra e o corpo de prova) utilizando a força de Weber completa para a gravitação (e não considerando apenas a sua componente newtoniana que não depende da velocidade nem da aceleração). Isto é, precisaríamos de integrar a Eq. (8.10) para toda a Terra e resolver a equação de movimento resultante. Não vamos tratar disto aqui.

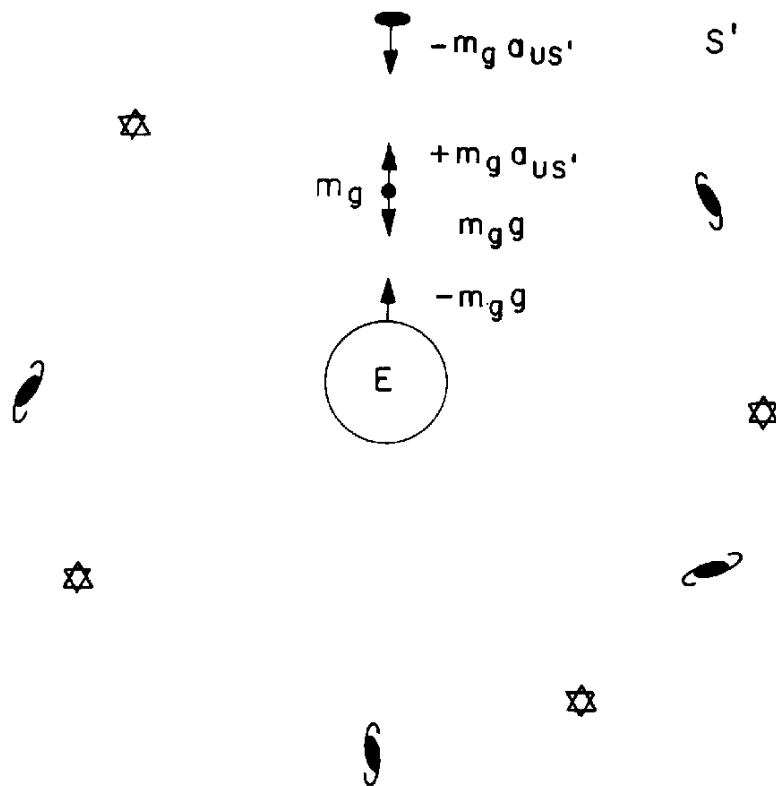



Figura 9.3: Forças na situação de queda livre, no referencial do corpo de prova.

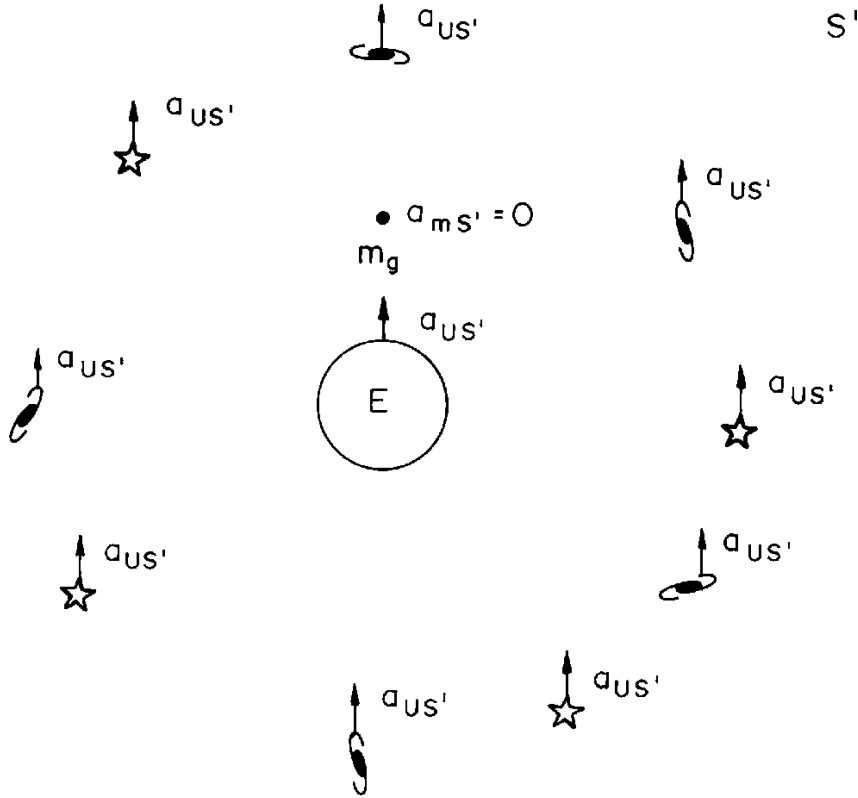



Figura 9.4: Acelerações como vistas pelo corpo de prova.

9.2.2 Carga Movendo-se no Interior de um Capacitor Ideal

O outro exemplo analisado aqui é o de uma partícula carregada q sofrendo a ação de um capacitor ideal em repouso em relação à Terra. O capacitor é carregado com densidades superficiais de carga $\pm\sigma$ sobre suas placas ortogonais ao eixo z, localizadas em $\pm z_o$, Figura 2.3. A carga teste está localizada no tempo t em $\vec{r} = z\hat{z}$ e se move com velocidade $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ e aceleração $\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$ em relação às placas do capacitor.

A força exercida por este capacitor sobre a carga pontual q na

eletrodinâmica de Weber é diferente do resultado coulombiano. Ela é dada por ([Ass94], Seção 6.7):

$$\vec{F}(-z_o < z < z_o) = -q\frac{\sigma}{\varepsilon_o}\left[\hat{z} + \frac{v^2}{2c^2}\hat{z}\right.$$

$$\left. - \frac{v_x(v_x\hat{x} + v_y\hat{y})}{c^2} - \frac{z\vec{a}}{c^2} + \frac{2za_z}{c^2}\hat{z}\right] ,$$

Consideramos aqui apenas movimentos tais que $v^2/c^2 \ll 1$ e $za/c^2 \ll 1$, de tal forma que este resultado se reduz ao coulombiano, ou seja: $\vec{F}_o \approx -q\sigma\hat{z}/\varepsilon_o = q\vec{E}$.

A Eq. (9.2) leva a:

$$\vec{a}_{me} = \frac{q}{m_g}\vec{E} = -\frac{q\sigma}{m_g\varepsilon_o}\hat{z} .$$

Como não há relação entre a carga elétrica q e a massa gravitacional da partícula m_g, a aceleração de duas cargas diferentes como uma partícula alfa e um próton no mesmo capacitor podem ser diferentes, como de fato é o caso.

Se dobrarmos (dividirmos pela metade) a densidade das galáxias externas, mantendo inalterados a carga teste e o capacitor, a aceleração da carga teste vai cair pela metade (dobrar) de acordo com a mecânica relacional.

9.2.3 Trem Acelerado

Suponhamos agora o trem acelerado em relação à superfície terrestre, com um pêndulo simples preso em seu teto. Analisamos aqui apenas a situação de equilíbrio em que o pêndulo não se move em relação ao trem, mantendo um ângulo θ constante em relação a vertical. As forças agindo sobre a massa m_g presa ao pêndulo, desprezando a resistência do ar, são seu peso $\vec{P} = m_g\vec{g}$, a tensão no fio $\vec{T}$ e a força gravitacional devido ao universo distante. A Eq. (9.2) resulta em:

$$m_g\vec{g} + \vec{T} - m_g\vec{a}_{me} = 0 \ . \tag{9.7}$$

Utilizando o ângulo θ da Figura 2.5 resulta:

$$m_g g = T\cos\theta \ ,$$

$$T\sin\theta = m_g a_{me} \ .$$

Destas expressões obtemos imediatamente:

$$\tan\theta = \frac{a_{me}}{g} \ .$$

Isto é, segue diretamente da mecânica relacional que o ângulo de inclinação vai depender apenas da razão da aceleração linear do corpo em relação à Terra a_{me} e da aceleração de queda livre g. Ele não vai depender do peso, forma ou composição química do corpo, embora a tensão no fio vá depender do peso do corpo de prova.

Analisamos agora este problema no referencial do trem T. Neste caso o trem e o pêndulo são vistos em repouso, enquanto que a Terra e o universo distante movem-se com uma aceleração $\vec{a}_{UT}$ dada por: $\vec{a}_{UT} = -\vec{a}_{te}$, onde $\vec{a}_{te}$ é a aceleração do trem em relação à superfície terrestre. Neste caso a Eq. (9.4) fica na forma

$$m_g\vec{a}_{mT} = \vec{P} + \vec{T} + m_g\vec{a}_{UT} \ .$$

Como neste referencial o corpo de prova está em repouso, $\vec{a}_{mT} = 0$ e como $\vec{a}_{UT} = -\vec{a}_{te}$ obtemos a mesma Eq. (9.7), de tal forma que o resultado final é o mesmo. Apenas a interpretação do que ocorre é um pouco diferente da situação vista no referencial da Terra. Dizemos agora que a tensão $\vec{T}$ e o peso $\vec{P}$ são contrabalançados por uma força gravitacional exercida sobre m_g pelo universo distante acelerado, tal

que m_g não se move neste referencial, ver a Figura 9.5.

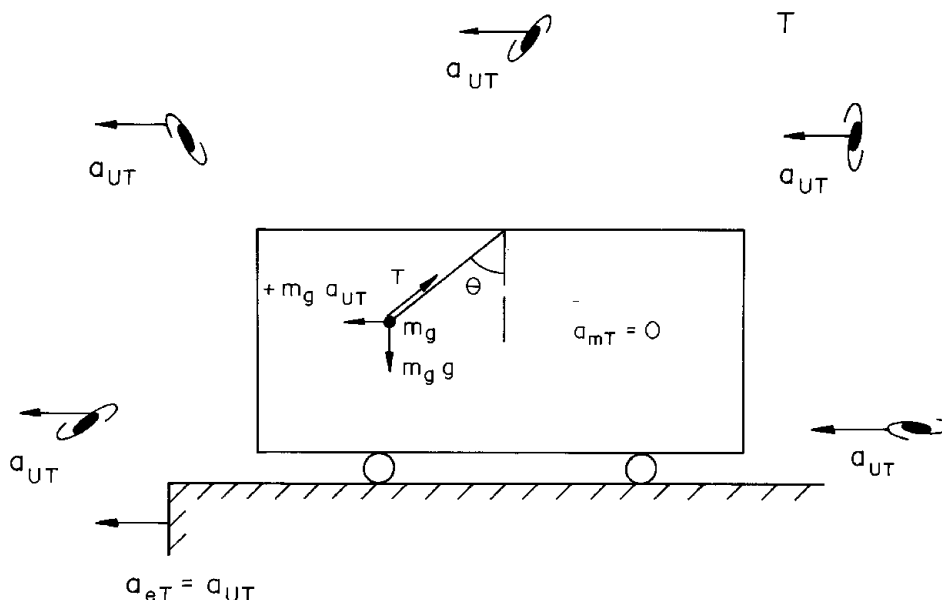



Figura 9.5: Situação vista do trem.

A maneira mais fácil de entender a situação de equilíbrio no referencial do trem é pensar que o universo acelerado para a esquerda exerce uma força gravitacional sobre o corpo de prova, força esta apontando para a esquerda, proporcional a m_g e a esta aceleração do universo. Dada esta aceleração do universo podemos obter o ângulo θ e a tensão T no fio tal que o corpo permaneça em repouso em relação ao trem. Isto é, igualamos $T\cos\theta$ com $P = m_g g$ e $T\sin\theta$ com $m_g a_{UT}$. Desta maneira encontramos θ e T tais que o corpo permaneça em repouso, $a_{mT} = 0$.

Se pudéssemos dobrar a quantidade de galáxias externas no universo, mantendo sem alterações o pêndulo, o trem e a Terra, então seria muito mais difícil acelerar o trem em relação à Terra (sua "inércia" teria dobrado). Isto é evidente a partir das Eqs. (8.13) a (8.17). Mas suponha que dobramos a quantidade de galáxias e realizamos um esforço maior para acelerar o trem pela mesma quantidade a_{me} em

relação à Terra. Neste caso a tensão no fio acelerando o corpo cresceria comparada com a tensão para acelerar o corpo com a quantidade atual de matéria no universo. E o novo ângulo de inclinação seria dado por: $\tan\theta = 2a_{me}/g$. Estes resultados são uma conseqüência das novas condições de equilíbrio, a saber:

$$m_g g = T\cos\theta \ ,$$

$$T\sin\theta = (2m_g)a_{me} \ .$$

Isto é, $T = m_g\sqrt{g^2 + 4a_{me}^2}$, enquanto que na presente situação temos $\tan\theta = a_{me}/g$ e $T = m_g\sqrt{g^2 + a_{me}^2}$.

9.3 Movimentos Oscilatórios

Consideramos aqui corpos movendo-se sobre a superfície terrestre tal que novamente a condição (8.24) seja satisfeita. Neste caso a equação de movimento da mecânica relacional se reduz a Eq. (9.2).

9.3.1 Mola

Analisamos inicialmente um corpo preso a uma mola e oscilando horizontalmente. Seu peso é contrabalançado por uma força de reação normal exercida por uma mesa sem atrito, Figura 2.6. No movimento unidimensional de um corpo de prova ligado a uma mola de constante elástica k a equação de movimento se reduz a:

$$- \ kx - m_g a_{me} = 0 \ .$$

Aqui x é o deslocamento do corpo a partir da posição de equilíbrio. Como estamos considerando apenas o movimento unidimensional, podemos colocar $a_{me} = \ddot{x}$. A solução desta equação de movimento resulta em:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \theta_o) \ ,$$

onde A é a amplitude de oscilação (especificada pelas condições iniciais), θ_o é a fase de oscilação (também especificada pelas condições iniciais) e ω é a freqüência de oscilação dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_g}} \ .$$

Este resultado mostra que para molas oscilando horizontalmente a freqüência de vibração é inversamente proporcional ao peso do corpo de prova, como observado experimentalmente. Uma comparação com a Eq. (2.11) da mecânica newtoniana mostra que a maior diferença é o aparecimento na mecânica relacional de m_g ao invés da massa inercial m_i.

Dobrando a quantidade de galáxias no universo, mantendo inalteradas a mola, a Terra e o corpo de prova, diminuiria a freqüência de oscilação em $\sqrt{2}$. Isto é, seria equivalente a dobrar a massa inercial newtoniana do corpo de prova.

9.3.2 Pêndulo Simples

Consideramos agora um pêndulo simples oscilando próximo à superfície terrestre. Desprezando a resistência do ar, as forças agindo sobre o corpo de massa gravitacional m_g são seu peso $\vec{P} = m_g\vec{g}$, a tensão no fio $\vec{T}$ e a força gravitacional exercida pelas galáxias distantes, $-m_g\vec{a}_{me}$:

$$m_g\vec{g} + \vec{T} - m_g\vec{a}_{me} = 0 \ .$$

Utilizando a condição de que o comprimento l do fio permanece constante e um sistema de coordenadas polares com $\vec{a}_{me} = -l\dot{\theta}^2\hat{l} + l\ddot{\theta}\hat{\theta}$, Figura 2.7, resulta em:

$$T - m_g g\cos\theta - m_g l\dot{\theta}^2 = 0 \ ,$$

$$-m_g g\sin\theta - m_g(l\ddot{\theta}) = 0 \ .$$

Esta última equação mostra que mesmo sem aproximações adicionais o valor do ângulo de oscilação como uma função do tempo não

vai depender de m_g, já que m_g pode ser cancelado nesta equação. O mesmo não aconteceu na equação anterior para a tensão T.

Na aproximação de pequenas oscilações ($\theta \ll \pi/2$) esta última equação e sua solução se reduzem a:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \ ,$$

$$\theta = A\cos(\omega t + B) \ ,$$

onde A e B são constantes que dependem das condições iniciais e ω é a freqüência de oscilação dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \ .$$

Vemos assim que a mecânica relacional explica imediatamente o resultado experimental de Newton de que corpos com composições químicas diferentes oscilam com a mesma freqüência em pêndulos de mesmo comprimento colocados no mesmo ponto da superfície terrestre.

Dobrando a quantidade de galáxias no universo, mantendo inalteradas a Terra, o corpo de prova e o fio, decresceria a freqüência de oscilação em $\sqrt{2}$. Isto é, seria equivalente a dobrar a massa inercial newtoniana do corpo de prova.

9.4 Movimento Circular Uniforme

9.4.1 Órbita Circular de um Planeta

Nesta Subseção consideramos dois corpos orbitando um ao redor do outro em relação às estrelas distantes, devido a atração gravitacional entre eles. O sistema de referência considerado aqui é o das estrelas fixas e estes corpos podem ser o Sol e um planeta. A aceleração centrípeta do sistema solar ao redor do centro de nossa galáxia é dado aproximadamente por $a_s \approx 10^{-10}\ m/s^2$. As acelerações centrípetas típicas dos planetas ao redor do Sol no referencial das estrelas fixas são como a da Terra, ou seja: $10^{-2} - 10^{-3}\ m/s^2$.

Como estas acelerações são muito maiores do que a_s, podemos desprezar a aceleração do sistema solar em relação às galáxias distantes ao estudar o movimento planetário. Isto é, o conjunto das galáxias distantes pode ser considerado como essencialmente sem aceleração em relação ao referencial das estrelas fixas. Isto significa que $\vec{a}_{mU} \approx \vec{a}_{mf}$. Assim, a Eq. (8.22) se reduz a:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \vec{a}_{mf} = 0 \ ,$$

onde $\vec{a}_{mf}$ é a aceleração do corpo de prova m_g em relação ao referencial das estrelas fixas. Esta é a equação de movimento da mecânica relacional válida no referencial das estrelas fixas nesta aproximação de $a_{mf} \gg 10^{-10}\ m/s^2$.

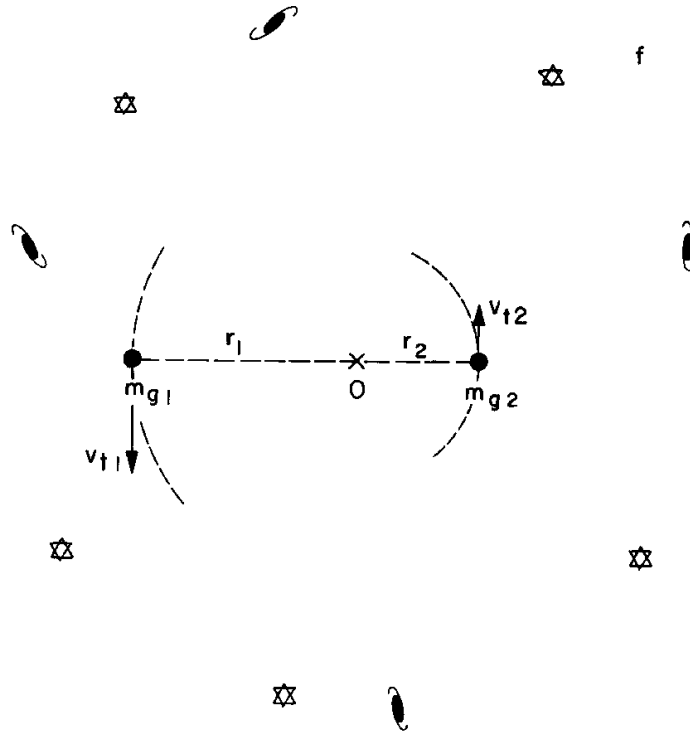



Figura 9.6: Órbitas gravitacionais no referencial das estrelas fixas.

A força gravitacional exercida entre os corpos 1 e 2 é dada pela lei de Weber, Eq. (8.4):

$$\vec{F}_{21} = -Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left[1 - \frac{\xi}{c^2}\left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12}\right)\right] = -\vec{F}_{12} \ .$$

Consideramos aqui a situação na qual eles estão se movendo em círculos em relação às estrelas fixas, mantendo uma distância constante para o centro de massa entre eles. Neste caso $\dot{r}_{12} = 0$ e $\ddot{r}_{12} = 0$, de tal forma que a força de Weber se reduz à newtoniana.

Escolhemos a origem do sistema de coordenadas no centro de massa dos dois corpos. A situação vista no referencial das estrelas fixas é representada na Figura 9.6.

Neste caso as acelerações dos corpos 1 e 2 são apenas suas acelerações centrípetas, a saber: $\vec{a}_{1f} = -(v_{t1}^2/r_1)\hat{r}_1$ e $\vec{a}_{2f} = -(v_{t2}^2/r_2)\hat{r}_2$. Aqui v_{t1} é a velocidade tangencial do corpo 1 em relação ao referencial das estrelas fixas a uma distância r_1 do centro de massa e $\hat{r}_1$ é o vetor unitário radial apontando para ele, analogamente para o corpo 2. Como $\hat{r}_1 = -\hat{r}_2 = \hat{r}_{12}$ e $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ somos levados a:

$$F = G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2} = m_{g1}a_{1f} = m_{g1}\frac{v_{t1}^2}{r_1} = m_{g2}a_{2f} = m_{g2}\frac{v_{t2}^2}{r_2} \ .$$

As massas gravitacionais se cancelam como usual. Como temos $m_{g1}r_1 = m_{g2}r_2$ vemos que ambos os corpos orbitam com uma velocidade angular constante ω_{mf} em relação ao referencial das estrelas fixas dada por:

$$\omega_{mf} = \frac{v_{t1}}{r_1} = \frac{v_{t2}}{r_2} = \sqrt{\frac{Gm_{g1}}{r_{12}^2 r_2}} = \sqrt{\frac{Gm_{g2}}{r_{12}^2 r_1}} \ .$$

Se o eixo z é normal ao plano do movimento e apontando de acordo com a regra da mão direita seguindo o movimento dos planetas, então ele vai apontar para cima na Figura 9.6. A velocidade angular vetorial de rotação dos planetas será então dada por $\vec{\omega}_{mf} = \omega_{mf}\hat{z}$.

Deve ser enfatizado aqui a grande diferença conceitual quando este problema é tratado na mecânica newtoniana ou na relacional. No primeiro caso é um problema de apenas dois corpos, com os planetas ou corpos orbitando no espaço. Por outro lado, na mecânica

relacional este é um problema de muitos corpos interagindo entre si, a saber: os dois corpos (o Sol e um planeta, por exemplo) mais as outras massas do universo como as galáxias distantes. As galáxias distantes têm um papel fundamental na mecânica relacional e não podem ser desprezadas. Deve-se sempre estar ciente desta diferença conceitual. Com o universo atual não se pode mais tratar de um "problema de dois corpos" na mecânica relacional, já que as estrelas e galáxias distantes têm sempre de aparecer na formulação de qualquer problema.

Suponha agora que estamos num referencial S que gira junto com o planeta. Supomos S centrado no centro de massa dos dois corpos. Neste novo referencial as galáxias distantes e as estrelas fixas são vistas girando como um todo com uma velocidade angular dada por (desprezando $10^{-10}\ m/s^2$ comparado com ω_{US}):

$$\vec{\omega}_{US} = -\vec{\omega}_{mf} = -\sqrt{\frac{Gm_{g1}}{r_{12}^2 r_2}}\hat{z} \ .$$

A equação de movimento relacional neste caso é dada pela Eq. (8.23), a saber:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \left[\vec{a}_{mS} + \vec{\omega}_{US} \times (\vec{\omega}_{US} \times \vec{r}_{mS}) \right.$$

$$\left. + \ 2\vec{v}_{mS} \times \vec{\omega}_{US} + \vec{r}_{mS} \times \frac{d\vec{\omega}_{US}}{dt} \right] = 0 \ .$$

Como neste referencial os corpos 1 e 2 são vistos em repouso, $\vec{v}_{mS} = 0$ e $\vec{a}_{mS} = 0$. Além do mais, $d\vec{\omega}_{US}/dt = 0$. Desta forma esta equação se reduz a:

$$G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2} = m_{g1}\omega_{US}^2 r_{1S} \ ,$$

e uma equação análoga para o corpo 2. Isto é, a força gravitacional entre os corpos 1 e 2 é contrabalançada por uma força centrífuga gravitacional real exercida pelo conjunto girante de galáxias distantes em cada um dos corpos. Isto explica como eles podem manter

uma distância constante entre si e ficar em repouso neste referencial, apesar da atração gravitacional mútua entre ambos. Na mecânica newtoniana isto só podia ser explicado pela introdução de uma força centrífuga "fictícia" sem nenhuma origem física. Na mecânica relacional identificamos os corpos que estão causando esta força centrífuga, a saber, as galáxias distantes. Também descobrimos a origem desta força, ou seja, uma interação gravitacional que depende do movimento relativo, Figura 9.7.

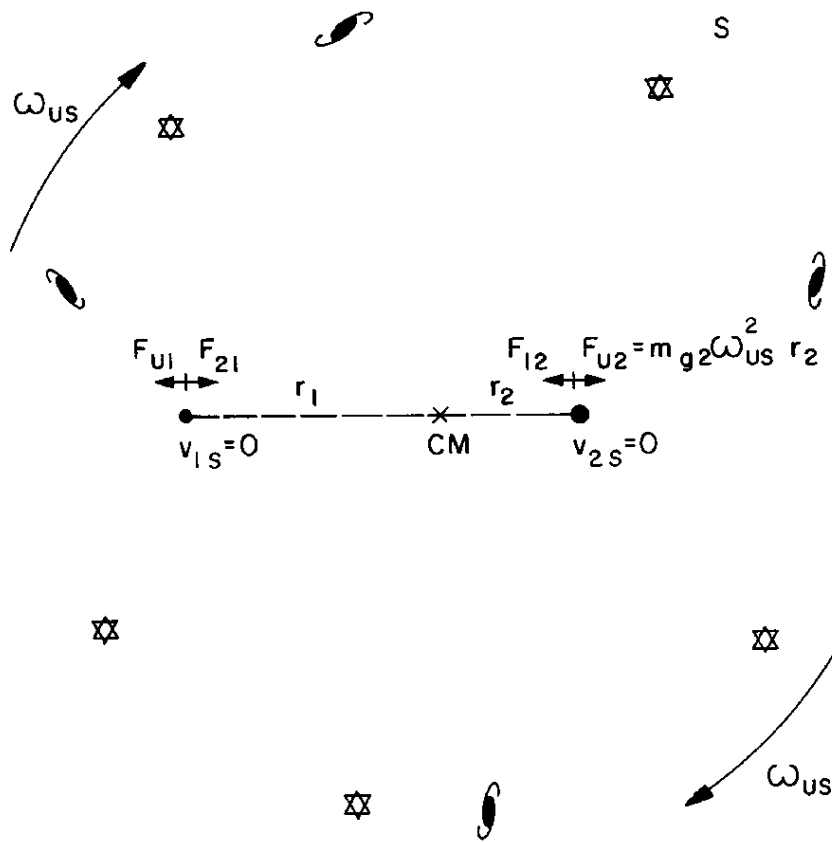



Figura 9.7: Força centrífuga gravitacional real equilibrando a atração gravitacional entre dois corpos.

Se pudéssemos manter o sistema solar inalterado e ao mesmo tempo dobrar o número ou densidade de galáxias no universo, então a mecânica relacional prevê que os corpos iriam agir como se tivéssemos dobrado suas massas inerciais newtonianas atuais. Isto fica claro a partir das Eqs. (8.13) a (8.17).

9.4.2 Dois Globos

A situação dos dois corpos ligados por uma corda e girando em relação às galáxias distantes e estrelas fixas é a mesma situação que analisamos no problema anterior, trocando a força gravitacional pela tensão $\vec{T}$ na corda.

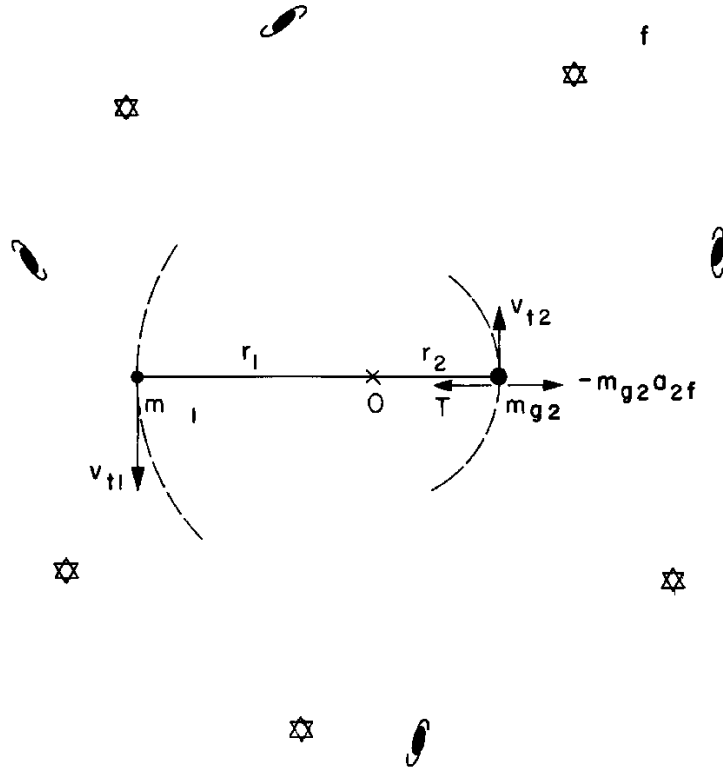



Figura 9.8: Globos girando em relação às galáxias distantes.

No referencial das estrelas fixas, os globos giram ao redor do centro de massa entre eles e a tensão na corda é contrabalançada pela força gravitacional $-m_g\vec{a}_{mf}$ devido a suas acelerações em relação às galáxias distantes. Ver a Figura 9.8.

No referencial S em que os globos são vistos em repouso, a tensão na corda é contrabalançada pela força centrífuga gravitacional $-m_g\vec{\omega}_{US} \times (\vec{\omega}_{US} \times \vec{r}_{mS})$ devido a rotação do universo distante ao redor dos globos. Ver a Figura 9.9.

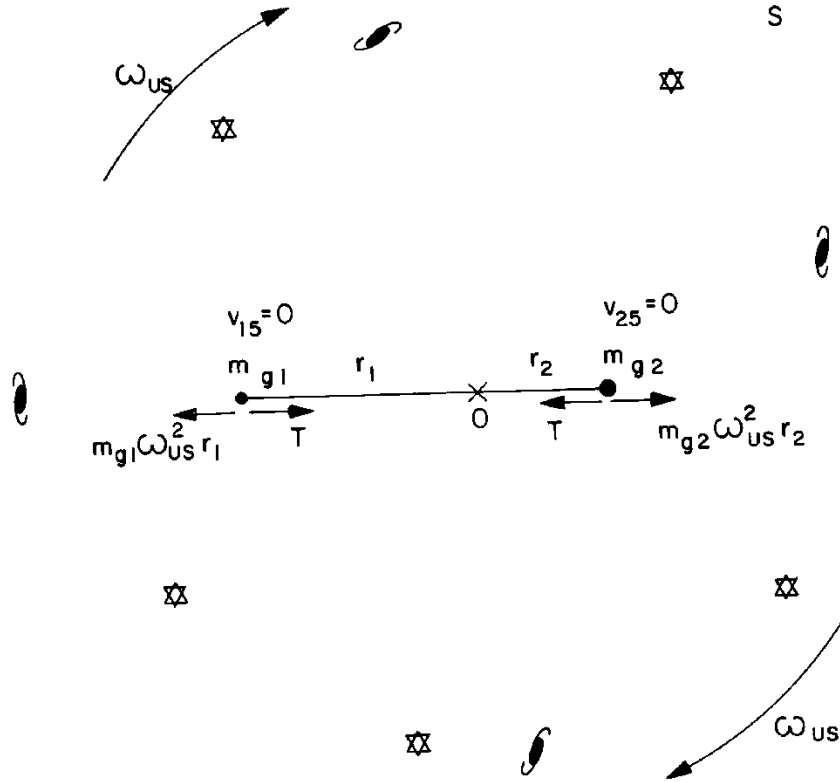



Figura 9.9: Conjunto de galáxias girante equilibrando ou criando a tensão na corda ligando dois globos estacionários.

A diferença principal da mecânica relacional em relação à newtoniana neste caso, é que a tensão na corda vai sempre aparecer desde

que a rotação relativa entre os globos e as galáxias distantes seja a mesma. No referencial f das estrelas fixas o conjunto das galáxias distantes e estrelas fixas está essencialmente em repouso enquanto que os globos giram com uma velocidade angular $\vec{\omega}_{gf} = \omega_o \hat{z}$. Num outro referencial S no qual os globos estão em repouso, é o conjunto de estrelas fixas e de galáxias distantes que gira em relação a S com uma velocidade angular $\vec{\omega}_{US} = -\omega_o \hat{z}$. Como vimos na Subseção 2.4.2, para Newton não apareceria nenhuma tensão na corda nesta última situação, ver a Figura 9.10.

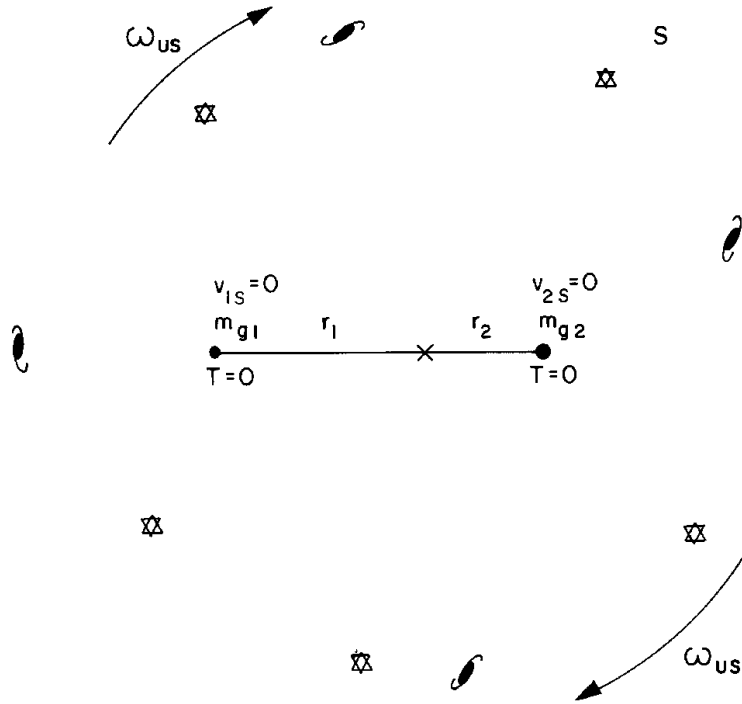



Figura 9.10: De acordo com a mecânica newtoniana, um conjunto de estrelas e galáxias girando não produz qualquer força centrífuga.

Mas para Mach, a tensão existiria nesta situação tanto quanto na primeira. E a mecânica relacional implementou quantitativamente

estas idéias de Mach mostrando com uma lei de Weber que nesta última situação vai aparecer uma força centrífuga real gerando ou equilibrando a tensão na corda, ver a Figura 9.9. Isto é, desde que a rotação cinemática seja a mesma (globos girando com $\omega_o \hat{z}$ enquanto as galáxias e estrelas estão em repouso, ou globos em repouso enquanto as galáxias e estrelas giram com $-\omega_o \hat{z}$), as conseqüências dinâmicas também serão as mesmas (a mesma tensão na corda nos dois casos). Isto já não acontece na relatividade geral de Einstein, [Ghi91] e [Ghi92]. Na mecânica relacional não podemos saber quem está de fato girando, mas a partir da tensão na corda podemos concluir que há uma rotação relativa entre os globos e o universo distante.

Suponha agora que dobramos a quantidade de galáxias externas, sem alterar a corda ou os dois globos. Seria mais difícil girar os globos devido ao aumento de suas inércias. Mas se girássemos os globos com a mesma velocidade angular em relação às galáxias distantes, a tensão na corda dobraria em comparação com a situação atual.

9.4.3 A Experiência do Balde de Newton

Neste caso, a condição (8.24) é válida de tal forma que a equação de movimento da mecânica relacional fica na forma simplificada da Eq. (9.2):

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \vec{a}_{me} = 0 \ .$$

Esta equação é similar à segunda lei do movimento de Newton, substituindo m_i por m_g e a aceleração em relação a um referencial inercial pela aceleração em relação à Terra. A solução é então a mesma, ou seja, uma superfície da água côncava na forma de um parabolóide de revolução, como dado pela Eq. (2.17).

No referencial que gira com o balde, a água está em repouso e a Terra, as estrelas fixas e as galáxias distantes estão todos girando na direção oposta (comparado com a água girando no referencial da Terra). Neste referencial B do balde, a equação de movimento da mecânica relacional fica na forma da Eq. (8.23). Como neste referencial a água está em repouso, $\vec{v}_{mB} = 0$ e $\vec{a}_{mB} = 0$. Além do mais,

a rotação angular do universo é essencialmente constante, tal que $d\vec{\omega}_{UB}/dt = 0$. Assim esta equação se reduz a:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \vec{\omega}_{UB} \times (\vec{\omega}_{UB} \times \vec{r}_{mB}) = 0 \ .$$

E esta equação é similar à segunda lei do movimento de Newton com a força centrífuga quando o corpo de prova não se move. Isto significa que a mecânica relacional prevê neste referencial o aparecimento de uma força centrífuga gravitacional real exercida pelo universo distante, girando ao redor do balde. Podemos então dizer que esta força centrífuga pressiona a água contra os lados do balde fazendo com que a água suba pelas paredes até que esta força centrífuga seja contrabalançada pelo gradiente de pressão.

Vamos supor agora que multiplicamos a densidade de matéria média ρ_o do universo por um valor constante k, mantendo a Terra, o balde e a água inalterados. De acordo com as Eqs. (8.13) a (8.17) obtemos uma equação de movimento equivalente à segunda lei de Newton com a massa inercial da água multiplicada por k. Seguindo a análise da Subseção 2.4.3, resultaria neste caso que:

$$dE \sin\alpha = k dm_g \omega_{me}^2 x \ ,$$

$$dE \cos\alpha = dm_g g \ .$$

Nesta equação g ainda é dado por $GM_g/R_t^2 \approx 9,8 \ m/s^2$. Ficamos então com $\tan\alpha = dz/dx = k\omega_{me}^2 x/g$, tal que a equação descrevendo a superfície livre da água girando ficaria na forma:

$$z = \frac{k\omega_{me}^2}{2g} x^2 \ .$$

A concavidade da parábola é dada por z/x^2. Ou seja, é proporcional a k ou à densidade de matéria das galáxias distantes ($k = 1$ é a situação do universo atual com uma densidade da ordem de um átomo de hidrogênio por metro cúbico). Isto mostra que mantendo a mesma rotação angular da água em relação à Terra e às galáxias distantes,

mas aumentando k, teríamos a água subindo mais pelas paredes do balde. Se $k \to 0$, o que significa aniquilar com as galáxias externas, então a superfície da água permaneceria essencialmente plana apesar de sua rotação. De qualquer forma ela seria sempre um pouco côncava, mesmo com o total desaparecimento das galáxias externas devido à rotação da água em relação à Terra, um efeito que não está sendo considerado aqui. Para levar em conta este efeito teríamos de integrar a Eq. (8.10) ao invés de dizer que a força exercida pela Terra sobre a água girando é dada simplesmente por $\vec{P} = -m_g g\hat{r}$.

Esta discussão ajuda a ilustrar a diferença marcante entre a mecânica relacional quando comparada com as de Newton e de Einstein, onde nada disto ocorreria.

Quando Mach estava criticando negativamente o espaço absoluto de Newton, ele disse: "*Tente fixar o balde de Newton e girar o céu das estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas.*" Implementamos quantitativamente o princípio de Mach com uma lei de Weber para a gravitação. Fixamos o balde de Newton, giramos o céu das estrelas fixas juntamente com as galáxias distantes e provamos a presença de forças centrífugas gravitacionais reais!

9.5 Rotação da Terra

9.5.1 A Forma da Terra

Consideramos agora a rotação da Terra em relação ao céu de estrelas fixas e galáxias distantes com um período de um dia.

No referencial das estrelas fixas a equação de movimento relacional tem a mesma forma que a segunda lei de Newton (desprezando os efeitos da rotação do sistema solar ao redor do centro de nossa galáxia em relação às galáxias distantes). As mudanças que aparecem são m_g ao invés de m_i e $\vec{a}$ sendo a aceleração da Terra em relação às estrelas fixas e não em relação ao espaço absoluto ou em relação a referenciais inerciais. E esta rotação da Terra a achata nos pólos, sendo a explicação equivalente nos dois casos (levando em conta as mudanças apontadas acima).

Já no referencial da Terra e desprezando a translação anual da

Terra ao redor do Sol, a equação de movimento relacional fica na forma da Eq. (8.23):

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \left[\vec{a}_{me} + \vec{\omega}_{Ue} \times (\vec{\omega}_{Ue} \times \vec{r}_{me})\right.$$

$$\left. + \, 2\vec{v}_{me} \times \vec{\omega}_{Ue} + \vec{r}_{me} \times \frac{d\vec{\omega}_{Ue}}{dt}\right] = 0 \ .$$

Como a Terra está em repouso neste referencial, $\vec{v}_{me} = 0$ e $\vec{a}_{me} = 0$. Considerando também que $d\vec{\omega}_{Ue}/dt = 0$ chegamos a:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \vec{\omega}_{Ue} \times (\vec{\omega}_{Ue} \times \vec{r}_{me}) = 0 \ .$$

Isto é, neste referencial vai aparecer uma força centrífuga real de origem gravitacional devido a rotação das galáxias distantes ao redor da Terra. Esta força centrífuga achata a Terra nos pólos.

O que aconteceria se as galáxias externas fossem aniquiladas ou não existissem? De acordo com a mecânica relacional a força centrífuga desapareceria, exceto por um pequeno valor devido a rotação da Terra em relação ao Sol, planetas e estrelas pertencendo a nossa própria galáxia. A Terra não mais seria achatada e a conseqüência "absurda" apontada por Clarke (como discutimos no Capítulo 5) ocorreria. O que aconteceria se dobrássemos a quantidade de galáxias no universo e se a Terra ainda mantivesse a mesma rotação diária com um período de 24 horas em relação a elas? De acordo com a mecânica relacional, o valor do achatamento terrestre ($R_> - R_<$) dobraria. Isto é devido ao fato de que a força centrífuga existente no referencial terrestre dobraria em relação ao seu valor atual, como pode ser visto por (8.12) e por (8.13).

9.5.2 Pêndulo de Foucault

Neste caso, apenas a força de Coriolis será relevante. O tratamento da mecânica newtoniana é equivalente ao da mecânica relacional, fornecendo os mesmos resultados. A diferença é o aparecimento

de m_g em vez de m_i e da rotação do conjunto das galáxias distantes ao redor da Terra ao invés da rotação da Terra em relação ao espaço absoluto.

O que deve ser enfatizado aqui, mais uma vez, é que a mecânica relacional oferece uma explicação física para a força de Coriolis. Ela passa a ser vista como uma força gravitacional real devido a uma rotação relativa entre a Terra e o conjunto das galáxias distantes.

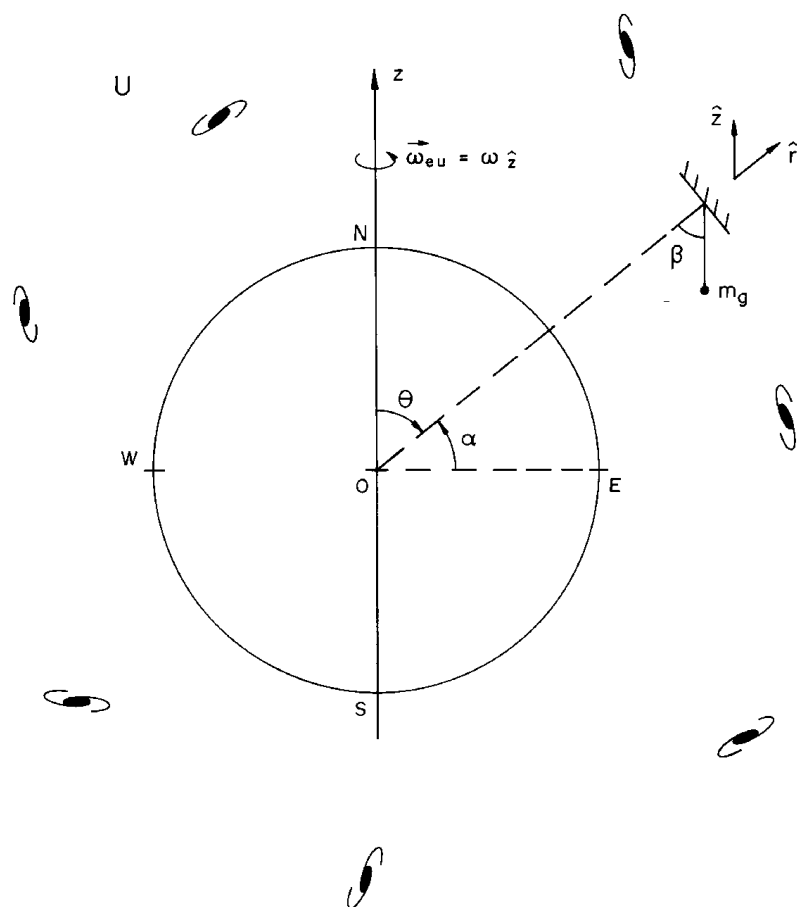



Figura 9.11: Pêndulo de Foucault no referencial universal U.

Vale a pena apresentar aqui um outro cálculo da rotação do plano de oscilação do pêndulo de Foucault. Na Figura 9.11 temos a Terra centrada em O girando com uma velocidade angular $\vec{\omega}_{eU} = \omega\hat{z}$ em relação ao referencial universal U fixo em relação às galáxias distantes. O pêndulo está localizado na latitude α (isto é, fazendo um ângulo $\theta = \pi/2 - \alpha$ com o eixo Norte-Sul da Terra). O peso do pequeno corpo m_g preso ao pêndulo é $-m_g g\hat{r}$.

No referencial da Terra a equação de movimento relacional é dada pela Eq. (8.23):

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - m_g \Big[\vec{a}_{me} + \vec{\omega}_{Ue} \times (\vec{\omega}_{Ue} \times \vec{r}_{me})$$

$$+ 2\vec{v}_{me} \times \vec{\omega}_{Ue} + \vec{r}_{me} \times \frac{d\vec{\omega}_{Ue}}{dt} \Big] = 0 \ .$$

Como estamos no referencial terrestre, todas as velocidades lineares e angulares, assim como as acelerações são relativas à superfície da Terra. Podemos considerar $d\vec{\omega}_{Ue}/dt = 0$ neste problema. Além do mais, sabemos que a força centrífuga não tem efeito sobre a rotação do plano de oscilação do pêndulo, tal que vamos desprezar esta força aqui. A equação de movimento para o corpo de massa gravitacional m_g pode então ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - 2m_g \vec{v}_{me} \times \vec{\omega}_{Ue} = m_g \vec{a}_{me} \ ,$$

onde $\vec{a}_{me}$ é a aceleração do corpo de prova em relação à Terra e $\vec{\omega}_{Ue}$ é a rotação angular das galáxias distantes em relação à Terra. Esta rotação é essencialmente a mesma que a das estrelas fixas em relação à Terra, desprezando a pequena aceleração do sistema solar em relação ao conjunto de galáxias distantes com um valor aproximado de $\approx 10^{-10}\ m/s^2$. Isto é, $\vec{\omega}_{Ue} = -\vec{\omega}_{eU} = -\omega\hat{z}$.

Suponha agora que temos um pêndulo de comprimento l com um pequeno corpo em sua extremidade de massa m_g oscilando no campo gravitacional terrestre. Introduzimos um outro sistema de coordenadas $(x',\ y',\ z')$ ou $(r',\ \theta',\ \varphi')$. A origem deste novo sistema de

coordenadas O' é o ponto de suporte do pêndulo. Utilizamos coordenadas esféricas e consideramos o eixo z' apontando verticalmente para cima naquela localização da Terra, isto é, ortogonal a superfície da Terra em cada ponto, Figura 9.12.

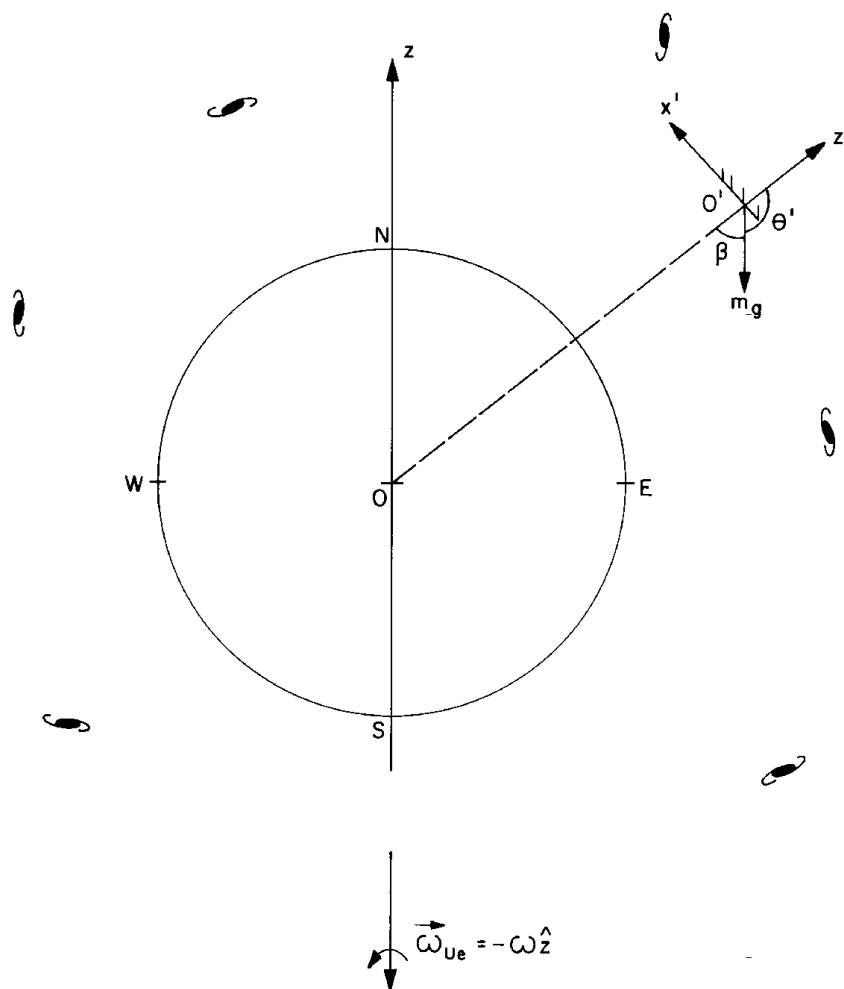



Figura 9.12: Pêndulo de Foucault no referencial da Terra.

As forças locais agindo sobre o pêndulo são seu peso $\vec{P} = -m_g g\hat{z}'$

e a tensão $\vec{T} = -T\hat{r}'$ no fio. A equação de movimento relacional pode então ser escrita como:

$$-m_g g\hat{z}' - T\hat{r}' + m_g\vec{v}_{me} \times \vec{B}_g = m_g\vec{a}_{me} .$$

Aqui definimos $\vec{B}_g \equiv -2\vec{\omega}_{Ue}$ para tornar este termo de Coriolis similar à força magnética. Ele pode ser chamado de campo magnético gravitacional gerado pela rotação do conjunto de galáxias distantes. Utilizamos agora que $\hat{z}' = \hat{r}'\cos\theta' - \hat{\theta}'\sin\theta'$, $\vec{r}' = l\hat{r}'$, $l = constante$, $\vec{v}_{me} = l\dot{\theta}'\hat{\theta}' + l\dot{\varphi}'\sin\theta'\hat{\varphi}'$, $\vec{a}_{me} = -(l\dot{\theta}'^2 + l\dot{\varphi}'^2\sin\theta'^2)\hat{r}' + (l\ddot{\theta}' - l\dot{\varphi}'^2\sin\theta'\cos\theta')\hat{\theta}' + (l\ddot{\varphi}'\sin\theta' + 2l\dot{\theta}'\dot{\varphi}'\cos\theta')\hat{\varphi}'$.

Vamos considerar que inicialmente o movimento está no plano $x'z'$. É então fácil ver que um campo magnético gravitacional na direção y' só vai mudar a tensão no fio para manter seu comprimento constante, mas não vai alterar o plano de oscilação do pêndulo (observando que a força $m_g\vec{v} \times \vec{B}_g$ estará neste plano). Um campo magnético gravitacional na direção x' também não vai alterar o plano de oscilação. A componente x' da velocidade não será influenciada por este campo. Por outro lado, quando o pêndulo está indo para baixo (com uma componente da velocidade em direção à parte negativa de z') a força magnética gravitacional estará na direção negativa de y'. Já quando o pêndulo está indo para cima a força magnética gravitacional estará na direção positiva de y'. E ambas as direções da força vão se alterar quando o pêndulo estiver voltando ao ponto inicial após este meio período. Isto mostra que a componente x' do campo magnético gravitacional não gira, na média de cada período, o plano de oscilação do pêndulo. O mesmo já não acontece com a componente z' do campo magnético gravitacional. Durante meio período (enquanto o pêndulo desce e sobe) o pêndulo vai sofrer uma força na direção positiva y', enquanto que durante o meio período seguinte a força estará apontando na direção negativa y'. E estas forças claramente giram o plano de oscilação. Por estes motivos e para simplificar a análise do que nos interessa (calcular a velocidade de giro do plano de oscilação), daqui por diante só consideraremos um campo magnético gravitacional da direção z': $\vec{B}_g = B_{gz'}\hat{z}'$.

Com este campo magnético gravitacional na componente $\hat{r}'$ da equação de movimento obtemos o valor da tensão no fio que vai manter seu comprimento constante: $T = -m_g[g\cos\theta' - l\dot{\theta}'^2 - l\dot{\varphi}'^2\sin^2\theta' -$

$B_{gz'} l\dot{\varphi}' \sin^2\theta']$. Estamos interessados apenas em pequenas oscilações ao redor de $\theta' = \pi$. Isto significa que $\sin\theta' \approx \pi - \theta'$ e $\cos\theta' \approx -1$. Utilizando isto nas componentes $\hat{\theta}'$ e $\hat{\varphi}'$ da equação de movimento resulta em, respectivamente:

$$\ddot{\theta}' + \left(\frac{g}{l} - B_{gz'}\dot{\varphi}' - \dot{\varphi}'^2\right)\theta' + \pi\left(B_{gz'}\dot{\varphi}' - \frac{g}{l} + \dot{\varphi}'^2\right) = 0 \ , \quad (9.8)$$

$$\ddot{\varphi}' = \frac{\dot{\theta}'(B_{gz'} + 2\dot{\varphi}')}{\pi - \theta'} \ . \quad (9.9)$$

Utilizamos como condições iniciais que $\theta' = \theta'_o$, $\dot{\theta}' = 0$, $\varphi' = \varphi'_o$ e $\dot{\varphi}' = 0$. Isto fornece a solução da Eq. (9.9) como:

$$\dot{\varphi}' = \frac{B_{gz'}}{2}\left[1 - \left(\frac{\pi - \theta'_o}{\pi - \theta'}\right)^2\right] \ .$$

Esta equação mostra que se $B_{gz'} = 0$ então $\varphi' = constante$. A solução da Eq. (9.8) satisfazendo as condições iniciais seria, neste caso sem campo magnético gravitacional: $\theta' = \pi + (\theta'_o - \pi)\cos(\omega_o t)$, onde $\omega_o \equiv \sqrt{g/l}$.

Resolvemos agora a Eq. (9.9) iterativamente supondo $B_{gz'}^2 \ll \omega_o^2 = g/l$. Isto é, colocamos a solução do caso com $B_{gz'} = 0$ no lado direito da Eq. (9.9) e a integramos. A solução desta nova equação é dada por:

$$\varphi' = \varphi'_o + \frac{B_{gz'}}{2}\left[t - \frac{\tan(\omega'_o t)}{\omega'_o}\right] \ .$$

O período de oscilação do pêndulo é dado por $T = 2\pi/\omega_o$. Como $\varphi'(t = 0) = \varphi'_o$ obtemos que após um período o valor final de φ' será dado por:

$$\varphi'(t = 2\pi/\omega_o) = \varphi'_o + \frac{\pi B_{gz'}}{\omega'_o} \ .$$

Isto significa que a velocidade angular de rotação do plano de oscilação é dada por:

$$\Omega = \frac{\triangle\varphi'}{\triangle t} = \frac{\varphi'(T) - \varphi'_o}{T} = \frac{B_{gz'}}{2} \ .$$

Olhemos agora para a Figura 9.12.

As estrelas e galáxias distantes giram ao redor do eixo Norte-Sul da Terra. Esta é a direção de $\vec{\omega}_{Ue} = -\omega\hat{z}$. Para um pêndulo oscilando na latitude α (por exemplo, em Paris onde $\alpha = 48^o\ 51'\ N$) a componente z' do campo magnético gravitacional será dada por $B_{gz'} = B_g \cos\theta = B_g \cos(90^o - \alpha) = B_g \sin\alpha = 2\omega_{Ue}\sin\alpha$, onde utilizamos a definição introduzida anteriormente, a saber: $\vec{B}_g = -2\vec{\omega}_{Ue}$. Isto significa que a rotação angular do plano de oscilação será dada por:

$$\Omega = \frac{B_{gz'}}{2} = \omega_{Ue}\sin\alpha \ .$$

E este é o valor observado da rotação do plano de oscilação. A aproximação utilizada neste cálculo de que $B_{gz'}^2 \ll \omega_o^2 = g/l$ é facilmente justificada observando que na experiência real de Foucault tínhamos $l = 11\ m$ tal que $\omega_o \approx 1\ rad/s \gg B_{gz'} = 2\omega_{Ue}\sin\alpha = 2(7,3 \times 10^{-5}\ rad/s) \times 0,75 = 10^{-4}\ rad/s$.

Isto é, na mecânica relacional podemos interpretar esta rotação como um análogo da força magnética usual. Neste caso o céu girante de galáxias distantes gera um campo magnético gravitacional $\vec{B}_g = -2\vec{\omega}_{Ue}$ que exerce uma força sobre as massas gravitacionais dada por $m_g\vec{v}_{me} \times \vec{B}_g$.

A forma achatada da Terra ou o pêndulo de Foucault não podem mais ser utilizados como prova da rotação absoluta e real da Terra. Na mecânica relacional estes fatos podem ser igualmente explicados com o conjunto das galáxias distantes em repouso (exercendo uma força gravitacional $-m_g\vec{a}_{mU}$ sobre os corpos de prova ou sobre a Terra) enquanto a Terra gira em relação a este referencial, ou com a Terra em repouso enquanto as galáxias distantes giram ao redor dela exercendo uma força gravitacional $-m_g(\vec{a}_{me} + 2\vec{v}_{me} \times \vec{\omega}_{Ue} + \vec{\omega}_{Ue} \times (\vec{\omega}_{Ue} \times \vec{r}_{me}))$ sobre os corpos de prova ou sobre a Terra. Ambas explicações são igualmente corretas e levam aos mesmos efeitos. Passa a ser então uma questão de conveniência ou de convenção escolher a Terra, ou as galáxias distantes, ou qualquer outro corpo ou sistema de referência como estando em repouso. Este é um resultado muito elegante e profundo da mecânica relacional, que não tinha sido

implementado quantitativamente por qualquer outra formulação da mecânica até o momento.

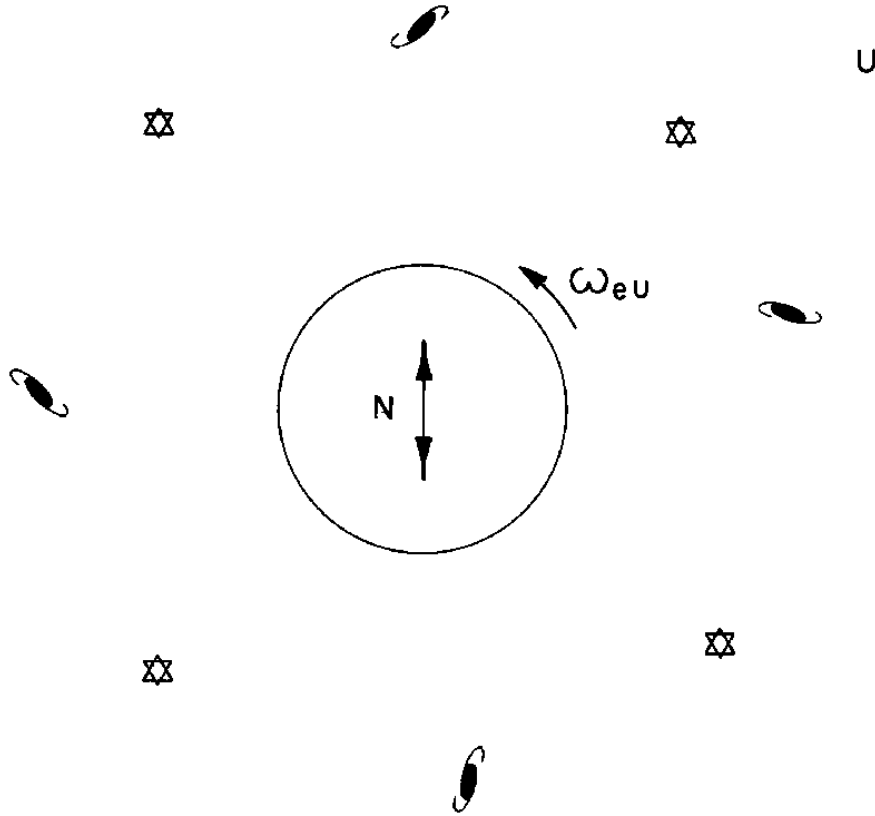



Figura 9.13: Plano de oscilação do pêndulo de Foucault fixo em relação às galáxias distantes.

Adquirimos assim uma nova compreensão do pêndulo de Foucault. Vamos apresentá-la apenas no caso mais simples de um pêndulo oscilando no pólo Norte. Concluímos que o plano de oscilação é fixo em relação ao referencial das galáxias distantes, não interessando a rotação da Terra em relação a este referencial, Figura 9.13. Nesta Figura estamos no referencial universal U olhando a Terra girar embaixo de nós. Enquanto a Terra gira, o plano de oscilação permanece fixo em relação a U.

Para um observador fixo na Terra, a explicação é a mesma. Isto é, ele pode dizer que o conjunto das galáxias distantes girando ao redor dele faz com que o plano de oscilação do pêndulo gire junto com as galáxias, Figura 9.14: $\vec{\Omega}_{pe} = \vec{\omega}_{Ue}$.

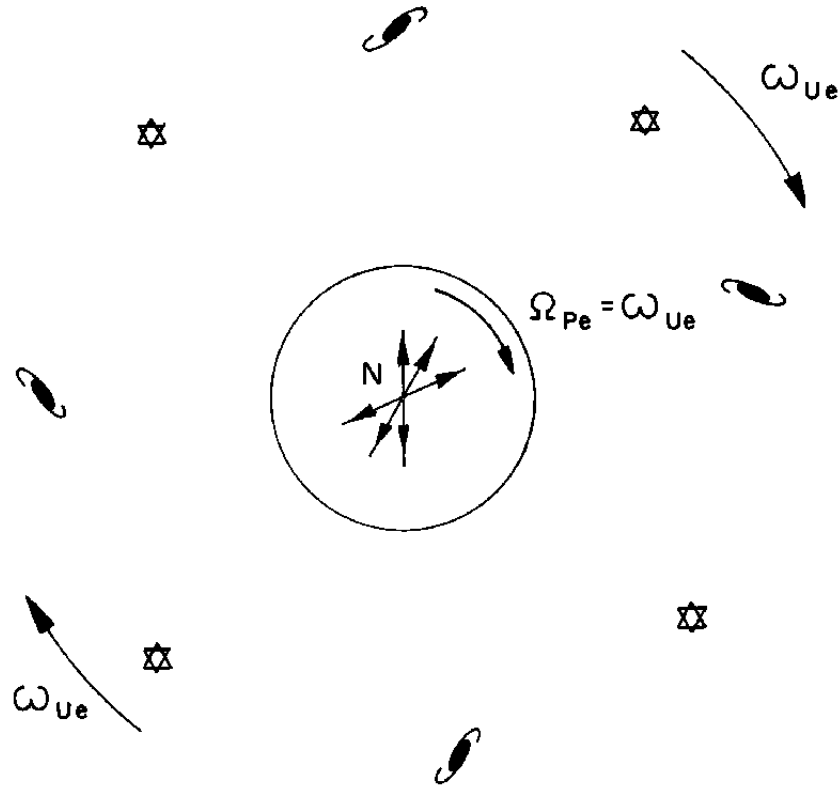



Figura 9.14: Universo girando fazendo com que o plano de oscilação do pêndulo gire junto com ele.

Se todas as galáxias externas fossem aniquiladas, mantendo inalterados o pêndulo, a Terra e a nossa galáxia, então o plano de oscilação do pêndulo ficaria fixo em relação à Terra de acordo com a mecânica relacional (supondo que ele ainda teria uma certa massa inercial efetiva devido a existência de nossa galáxia e desprezando a rotação de nossa galáxia ao redor da Terra). Se a densidade das

galáxias externas fosse multiplicada por uma constante k, mantendo a Terra e o pêndulo inalterados, então o pêndulo se comportaria como tendo uma massa inercial newtoniana dada por km_g. Utilizando este dado podemos comparar os resultados da mecânica relacional nesta situação com aqueles das mecânicas newtoniana ou relativística.

Capítulo 10

Além de Newton

Nos Capítulos anteriores vimos como obter resultados análogos aos newtonianos mas utilizando a mecânica relacional. Vimos também como resolver muitos enigmas da física clássica como a proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais, a origem das forças centrífuga e de Coriolis etc.

Neste Capítulo discutimos alguns fenômenos que estão além da teoria newtoniana. Eles surgem teoricamente dos termos adicionais que aparecem na força de Weber gravitacional quando comparada com a lei da gravitação universal de Newton.

10.1 Precessão do Periélio dos Planetas

Começamos discutindo o problema de dois corpos movendo-se sob a interação gravitacional mútua, na presença das galáxias distantes. No caso do sistema solar vale a condição (8.27) tal que a equação de movimento para o corpo 1 no referencial das estrelas fixas fica na forma:

$$\vec{F}_{21} - m_{g1}\vec{a}_{1f} = 0 \ .$$

Aqui $\vec{F}_{21}$ é a força exercida por 2 sobre 1 e $\vec{a}_{1f}$ é a aceleração do corpo 1 em relação às estrelas fixas (esta aceleração é essencialmente a mesma que a do corpo 1 em relação às galáxias distantes). E analogamente para o corpo 2:

$$\vec{F}_{12} - m_{g2}\vec{a}_{2f} = 0 \ .$$

Consideramos aqui o Sol interagindo com um planeta. Podemos considerar os planetas como pontos materiais já que seus diâmetros são muito menores do que suas distâncias ao Sol. Neste problema o Sol também pode ser considerado como um ponto material: A força exercida pelo Sol de raio R_s sobre um ponto material externo 1 é

obtida integrando a Eq. (8.10). Porém, como já mostramos antes, [Ass89a], os termos multiplicando o segundo ξ nesta equação são ao menos 6×10^{-4} menores do que os termos multiplicando o primeiro ξ no caso do sistema planetário. Isto significa que podemos considerar o Sol como um ponto material neste problema.

A força exercida pelo Sol (representado pelo índice 2) sobre um planeta (índice 1) de acordo com a expressão de Weber fica então dada pela Eq. (8.4):

$$\vec{F}_{21} = -G m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) \right] = -\vec{F}_{12} \ .$$

As equações de movimento ficam então na forma:

$$m_{g1}\vec{a}_{1f} = - \ G m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) \right] , \qquad (10.1)$$

$$m_{g1}\vec{a}_{2f} = + \ G m_{g1} m_{g2} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) \right] . \qquad (10.2)$$

Adicionando estas duas equações obtemos a conservação do momento linear total do sistema Sol-planeta em relação às estrelas fixas:

$$m_{g1}\vec{a}_{1f} + m_{g2}\vec{a}_{2f} = \frac{d}{dt}(m_{g1}\vec{v}_{1f} + m_{g2}\vec{v}_{2f}) = 0 \ .$$

O centro de massa do sistema Sol-planeta, $\vec{R} \equiv (m_{g1}\vec{r}_{1f} + m_{g2}\vec{r}_{2f})/(m_{g1} + m_{g2})$ se move então com uma velocidade constante em relação às estrelas fixas.

A diferença entre as acelerações nas Eqs. (10.1) e (10.2) fornece:

$$\vec{a}_{12} \equiv \vec{a}_{1f} - \vec{a}_{2f} = -G(m_{g1} + m_{g2}) \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(r_{12}\ddot{r}_{12} - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2} \right) \right] . \qquad (10.3)$$

Isto mostra que $\vec{a}_{12}$ é paralelo a $\hat{r}_{12}$.

Podemos definir um momento angular relativo no referencial das estrelas fixas por

$$\vec{L}_{12} \equiv \vec{r}_{12} \times (M_g \vec{v}_{12}) \ ,$$

onde $M_g \equiv m_{g1} + m_{g2}$ é a massa gravitacional total do sistema Sol-planeta. Derivando esta equação em relação ao tempo, utilizando que $\vec{v}_{12} \times \vec{v}_{12} = 0$ e o resultado anterior que $\vec{a}_{12}$ é paralelo a $\hat{r}_{12}$ resulta num valor nulo. Isto significa que $\vec{L}_{12}$ é constante no tempo. Além do mais, $\vec{r}_{12}$ e $\vec{v}_{12}$ estão num mesmo plano cuja normal é paralela a $\vec{L}_{12}$. Escolhemos então um sistema de coordenadas centrado no Sol tal que o eixo z seja paralelo a $\vec{L}_{12}$. Neste sistema de referência, o planeta vai sempre se mover no plano xy. Escrevendo a Eq. (10.3) em coordenadas polares planas obtemos duas equações, uma para a componente $\hat{\varphi}$ e uma outra para a componente $\hat{\rho}$, a saber:

$$\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0 \ , \tag{10.4}$$

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -GM_g \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\ddot{\rho}}{\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{2\rho^2} \right) \right] \ . \tag{10.5}$$

A primeira destas equações leva à conservação do momento angular. Isto significa que a quantidade $H \equiv \rho^2\dot{\varphi}$ é uma constante no tempo.

Definindo $u \equiv 1/\rho$ e utilizando um procedimento padrão a segunda equação pode ser colocada na forma

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = GM_g \left\{ \frac{1}{H^2} - \frac{\xi}{c^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u\frac{d^2u}{d\varphi^2} \right] \right\} \ . \tag{10.6}$$

A solução exata desta equação em termos de funções elípticas pode ser encontrada em [CA91] e em [Ass94]. Resolvemos aqui esta equação iterativamente seguindo o procedimento apresentado em [Ass89a]. Observando que o segundo e terceiro termos no colchetes são muito menores do que o primeiro termo, procuramos uma solução na forma $u(\varphi) = u_o(\varphi) + u_1(\varphi)$, com $|u_o| \gg |u_1|$, onde u_o e u_1 satisfazem as equações

$$\frac{d^2u_o}{d\varphi^2} + u_o = \frac{GM_g}{H^2} \ ,$$

$$\frac{d^2u_1}{d\varphi^2} + u_1 = -GM_g\frac{\xi}{c^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du_o}{d\varphi} \right)^2 + u_o\frac{d^2u_o}{d\varphi^2} \right] \ .$$

A solução da primeira equação é o resultado clássico

$$u_o(\varphi) = \frac{GM_g}{H^2} + A\cos(\varphi - \varphi_o) \ ,$$

onde A e φ_o vêm das condições iniciais. Com esta solução para u_o a solução para u_1 resulta em

$$u_1(\varphi) = \frac{G^2M_g^2A}{2H^2}\frac{\xi}{c^2}(\varphi - \varphi_o)\sin(\varphi - \varphi_o) + \frac{GM_gA^2}{2}\frac{\xi}{c^2}\sin^2(\varphi - \varphi_o) \ .$$

Os pontos de retorno (nos quais a distância do planeta ao Sol são um máximo ou um mínimo) são dados por $du/d\varphi = 0$. Podemos ver destas equações que $\varphi = \varphi_o$ é uma solução. Após uma revolução, o ponto de retorno estará próximo de $\varphi_o + 2\pi$. Expandindo $du/d\varphi$ ao redor deste valor e igualando a zero resulta em

$$\varphi \approx \varphi_o + 2\pi + \frac{\pi G^2 M_g^2}{H^2}\frac{\xi}{c^2} \ .$$

O avanço do periélio em uma revolução é então dado por:

$$\triangle\varphi = \pi\frac{\xi}{c^2}\frac{G^2M_g^2}{H^2} = \pi\frac{\xi}{c^2}\frac{GM_g}{a(1-\varepsilon^2)} \ , \tag{10.7}$$

onde a é o semi-eixo maior e ε é a excentricidade da órbita. Com o valor $\xi = 6$ chegamos num resultado que é bem observado no caso do sistema solar e que concorda algebricamente com aquele obtido com a teoria da relatividade geral de Einstein. Apesar desta coincidência, a equação de órbita obtida na relatividade geral é dada por

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{H^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \ .$$

Uma comparação desta equação com a (10.6) mostra que elas não são equivalentes no caso geral. Em ordem zero ambas resultam nas elipses, parábolas e hipérboles da teoria newtoniana. Em primeira ordem ambas resultam na mesma precessão do periélio dos planetas. Em segunda ordem elas já diferem uma da outra. Atualmente não podemos distinguir os termos de segunda ordem destas teorias utilizando os dados do sistema solar.

De qualquer forma, antes de comparar estas duas equações em segunda ordem, seria mais importante revisar os cálculos da precessão do periélio dos planetas utilizando estas duas teorias, mas levando em conta as perturbações das órbitas elípticas que surgem devido aos outros planetas. Como é bem conhecido, a teoria newtoniana explica a maior parte da precessão do periélio observada dos planetas levando em conta estas perturbações que têm origem devido às influências gravitacionais dos outros planetas. É apenas o valor residual que é explicado pela relatividade geral e pela mecânica relacional com a Eq. (10.7). Para sermos coerentes seria mais correto calcular novamente a componente da precessão devido a perturbação dos outros planetas não com a lei da gravitação universal de Newton, mas sim com a relatividade geral e com uma força de Weber gravitacional. Após este cálculo podemos comparar os valores residuais que sobrarem em ambas as teorias (se é que ainda vão existir e se existirem talvez não sejam mais os mesmos que os obtidos com a lei de Newton), com a Eq. (10.7).

10.2 Anisotropia da Massa Inercial

Discutimos aqui uma conseqüência importante de qualquer modelo tentando implementar o princípio de Mach. Concentramos nossa análise na lei de Weber gravitacional. Quando identificamos a mecânica relacional com a newtoniana concluímos que a inércia de um corpo, sua massa inercial, é devido a uma interação gravitacional com as massas distantes. Como uma conseqüência disto, se esta distribuição é anisotrópica, a massa inercial efetiva do corpo de prova também tem de ser anisotrópica. Vamos ilustrar este efeito analisando o problema de "dois" corpos.

Na Seção anterior obtivemos a equação de movimento para o planeta m_{g1} interagindo com o Sol m_{g2} e com as galáxias distantes na mecânica relacional como dada pela Eq. (10.1):

$$m_{g1}\vec{a}_{1f} = -\ Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left[1 - \frac{\xi}{c^2}\left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12}\right)\right] \ .$$

Na aproximação em que $m_{g2} \gg m_{g1}$ podemos desprezar o movimento do Sol em relação ao referencial das estrelas fixas e consi-

derar este como sendo essencialmente um problema de "um" único corpo sob a influência de uma força central. Com o movimento no plano xy centrado no Sol temos, em coordenadas cilíndricas: $\vec{a}_{1f} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\varphi)\hat{\varphi}$, $r_{12} = \rho$, $\dot{r}_{12} = \dot{\rho}$, $\ddot{r}_{12} = \ddot{\rho}$, $\hat{r}_{12} = -\rho\hat{\rho}$, onde ρ é a distância do planeta ao Sol. A componente $\hat{\varphi}$ desta equação resulta na conservação do momento angular, Eq. (10.4). A componente radial é dada pela Eq. (10.5), que pode ser escrita nesta aproximação de $m_{g2} \gg m_{g1}$ como:

$$m_r\ddot{\rho} - m_t\rho\dot{\varphi}^2 = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{\rho^2} + Gm_{g1}m_{g2}\frac{\xi}{c^2}\frac{\dot{\rho}^2}{2\rho^2} ,$$

onde $m_t \equiv m_{g1}$ é a massa gravitacional usual do planeta e $m_r \equiv m_{g1}(1 + Gm_{g2}\xi/\rho c^2)$. Isto é, com exceção do segundo termo no lado direito, esta equação é análoga à equação de movimento newtoniana com uma massa inercial efetiva radial m_r e com uma massa inercial efetiva tangencial m_t. E estas duas massas m_r e m_t são diferentes uma da outra devido ao fato de que o Sol está interagindo com o planeta ao longo da direção radial conectando-os, mas não ao longo da direção tangencial. E é exatamente este termo em m_r o responsável pela precessão do periélio dos planetas, o segundo termo no lado direito desta equação não gerando qualquer precessão.

Podemos então considerar a precessão do periélio dos planetas como um outro fato importante apoiando (embora não provando) o princípio de Mach e a anisotropia da massa inercial dos corpos. O primeiro a observar isto claramente parece ter sido Erwin Schrödinger (1887-1961), [Sch25] (ver [XA94] para uma tradução em português deste trabalho). Ele calculou a precessão do periélio dos planetas utilizando uma energia potencial análoga a de Weber, ao invés de trabalhar com forças. Encontramos na Seção 8.3 que a energia de interação gravitacional entre um planeta e as galáxias distantes é dada por $m_g v^2/2$, onde m_g é a massa gravitacional do planeta e v sua velocidade em relação ao referencial universal. Utilizando coordenadas polares no plano do movimento e a aproximação de que a massa do Sol é muito maior do que a massa do planeta ($M_g \gg m_g$) isto resulta em: $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$. A energia de interação entre o planeta e o Sol é dada pela Eq. (8.3). Assim a energia total constante para um planeta

é: $$m_g \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2}{2} - G \frac{M_g m_g}{\rho} \left(1 - \xi \frac{\dot{\rho}^2}{2c^2} \right) = constante \ .$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$\frac{m_r}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{m_t}{2} \rho^2 \dot{\varphi}^2 - G \frac{M_g m_g}{\rho} = constante \ ,$$

onde $m_t \equiv m_g$ e $m_r \equiv m_g(1 + \xi G M_g / \rho c^2)$. Isto é, a lei para a conservação da energia torna-se análoga à newtoniana desde que existam massas inerciais efetivas diferentes, uma na direção radial m_r e outra na direção tangencial $m_t = m_g$. Esta foi a conclusão de Schrödinger ao afirmar: "A presença do Sol tem o efeito de aumentar a interação gravitacional resultando no fato de que a inércia 'radial' do planeta ser algo menor do que a inércia 'tangencial', [XA94]. São estas massas inerciais efetivas diferentes nas direções radial e tangencial que geram a precessão do periélio dos planetas na mecânica relacional. A observação da precessão do periélio dos planetas pode então ser considerada quase como uma prova da anisotropia da massa inercial. Schrödinger continua concluindo que a inércia de um corpo deve ser maior no plano galáctico do que perpendicular a ele: "Uma distribuição de massa como a gerada pelas estrelas conhecidas deve fazer com que um corpo tenha uma interação da inércia maior no plano galáctico do que perpendicular a este" [XA94].

Como já vimos, a massa inercial efetiva de um corpo é diferente quando há anisotropias na distribuição de matéria ao redor dele. Isto é observado em interações puramente gravitacionais como nos movimentos do sistema solar. Em interações eletromagnéticas este efeito também deve aparecer. Isto é, se uma carga teste está interagindo com distribuições de carga anisotrópicas fixas ao redor dela, então de acordo com a eletrodinâmica de Weber ela deve se comportar como se tivesse uma massa inercial efetiva dependendo da geometria do problema, da direção do movimento e da energia potencial eletrostática onde ela está, ver: [Ass89b], [AC91], [CA95b], [CA95a], [Ass94], Seção 7.2 e [Ass95b], Seção 5.5. Testes experimentais deste fato, que não é predito na eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz, foram propostos em [Ass92a] e [Ass93a]. Acreditamos que a eletrodinâmica de Weber vai ser comprovada por estas experiências. Para realizar

a experiência é importante manter as cargas que compõem a distribuição anisotrópica de carga (que está agindo sobre a carga teste) fixas uma em relação a outra e também em relação ao laboratório, enquanto que a carga teste é acelerada em relação a elas e ao laboratório. Isto é, a experiência não pode ser realizada carregando uma gaiola de Faraday e acelerando cargas em seu interior. O motivo é que nesta última situação há cargas livres na gaiola metálica de Faraday que vão se mover quando a carga teste é acelerada em seu interior, respondendo ao movimento da carga teste. E isto pode mascarar o efeito a ser observado (a possível mudança na massa inercial efetiva da carga teste). Para realizar a experiência é importante carregar um isolante que vá manter as cargas fixas sobre ele, não interessando o movimento da carga teste em seu interior.

10.3 Partículas a Altas Velocidades

Há algumas indicações de que a expressão correta para a energia cinética dos corpos é dada por $mc^2(1/\sqrt{1-v^2/c^2}-1)$ ao invés de $mv^2/2$. Estas indicações vêm de experiências com elétrons movendo-se a altas velocidades em aceleradores e em colisões de altas energias de partículas carregadas. Seguindo esta sugestão, Schrödinger propôs em seu artigo importante de 1925 (e independentemente dele Wesley em 1990) uma modificação da energia potencial gravitacional de Weber: [Sch25], [XA94], [Wes90] e [Ass94], Seção 7.7. O que eles propuseram foi uma energia potencial de interação gravitacional entre duas massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2} dada por:

$$U_{12} = \beta \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} + \gamma \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}} \frac{1}{(1-\dot{r}_{12}^2/c^2)^{3/2}} \; . \tag{10.8}$$

Schrödinger propôs $\beta = -3G$ e $\gamma = 2G$, enquanto Wesley propôs $\beta = -4G/3$ e $\gamma = G/3$. Quando $\dot{r}_{12} = 0$ obtemos a energia potencial newtoniana. Expandindo esta expressão até segunda ordem em $\dot{r}_{12}/c$ resulta numa energia potencial para a gravitação análoga à de Weber.

A força exercida por 2 em 1 é obtida por $\vec{F}_{21} = -\hat{r}_{12} dU_{12}/dr_{12}$ ou por $dU_{12}/dt = -\vec{v}_{12} \cdot \vec{F}_{21}$. Disto resulta:

$$\vec{F}_{21} = m_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left[\beta + \gamma\left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} - 3\frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2}\right)^{-5/2}\right] . \tag{10.9}$$

Integramos ambas expressões para um corpo de prova de massa gravitacional m_{g1} interagindo com a distribuição isotrópica de matéria ao redor dele, isto é, com a distribuição isotrópica de galáxias distantes tendo uma densidade de massa gravitacional média ρ_o. Fazemos a integração no referencial universal U, isto é, no referencial onde o conjunto das galáxias distantes está essencialmente sem rotação e em repouso sem aceleração ou velocidades lineares como um todo. A velocidade e aceleração de m_{g1} em relação a este referencial são dadas por, respectivamente: $\vec{v}_{1U}$ e $\vec{a}_{1U}$. O resultado da integração até o raio de Hubble c/H_o resulta em:

$$U_{Im} = 2\pi\frac{m_{g1}\rho_o c^2}{H_o^2}\left(\beta + \frac{\gamma}{\sqrt{1 - v_{1U}^2/c^2}}\right) , \tag{10.10}$$

$$\vec{F}_{Im} = -2\pi\gamma\frac{\rho_o}{H_o^2}\left[\frac{m_{g1}\vec{a}_{1U}}{\sqrt{1 - v_{1U}^2/c^2}} + \frac{m_{g1}\vec{v}_{1U}(\vec{v}_{1U}\cdot\vec{a}_{1U})}{c^2(1 - v_{1U}^2/c^2)^{3/2}}\right]$$

$$= -2\pi\gamma\frac{\rho_o}{H_o^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_{g1}\vec{v}_{1U}}{\sqrt{1 - v_{1U}^2/c^2}}\right) . \tag{10.11}$$

Se quisermos integrar até o infinito seria necessário apenas incluir um decaimento exponencial em ambos os termos no lado direito da Eq. (10.8).

Com o princípio de equilíbrio dinâmico é então possível derivar uma expressão análoga à energia cinética relativística de Einstein e uma expressão análoga a sua equação de movimento. Apesar desta similaridade de forma, há muitas diferenças entre ambas as teorias. A primeira diferença é que os resultados (10.10) e (10.11) foram obtidos após uma interação gravitacional do corpo de prova com as galáxias distantes na mecânica relacional, enquanto que este já não é o caso na teoria da relatividade de Einstein. Como uma conseqüência disto, as

massas que aparecem nas Eqs. (10.10) e (10.11) são gravitacionais, enquanto que nas equações de Einstein elas são as massas inerciais no sentido newtoniano, com a inércia relacionada com o espaço e não com a matéria distante. Além disto, as velocidades e acelerações do corpo de prova que aparecem nestas equações obtidas com a mecânica relacional são relativas as galáxias distantes no referencial universal U, enquanto que na teoria de Einstein elas são relativas a um sistema de referência inercial arbitrário.

Vamos considerar dois corpos 1 e 2 interagindo entre si e com as galáxias distantes. O princípio de equilíbrio dinâmico aplicado às Eqs. (10.9) e (10.11) resulta na equação de movimento para o corpo 1 no referencial universal, a saber:

$$m_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left[\beta+\gamma\left(1-\frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2}-3\frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2}\right)\left(1-\frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2}\right)^{-5/2}\right]$$

$$-2\pi\gamma\frac{\rho_o}{H_o^2}\left[\frac{m_{g1}\vec{a}_{1U}}{\sqrt{1-v_{1U}^2/c^2}}+\frac{m_{g1}\vec{v}_{1U}(\vec{v}_{1U}\cdot\vec{a}_{1U})}{c^2(1-v_{1U}^2/c^2)^{3/2}}\right]=0\ .$$

Supondo que os corpos 1 e 2 estão orbitando ao redor um do outro neste referencial, com $\dot{r}_{12}=0$, $\ddot{r}_{12}=0$ e que $v_{1U}^2\ll c^2$ esta equação se reduz a:

$$\frac{(\beta+\gamma)H_o^2}{2\pi\gamma\rho_o}m_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}=m_{g1}\vec{a}_{1U}\ .$$

Isto mostra que podemos obter os resultados da mecânica newtoniana apenas se for exatamente válida a seguinte relação:

$$\frac{(\beta+\gamma)H_o^2}{2\pi\gamma\rho_o}=-G\ .$$

Utilizando os valores de β e γ dados por Schrödinger e por Wesley, assim como os valores observacionais de H_o, ρ_o e G obtemos que esta relação é aproximadamente válida. Não podemos dizer que ela seja válida exatamente devido a incertezas nos valores observacionais de H_o e ρ_o. De qualquer forma vemos mais uma vez que com

$\beta/\gamma \approx -1$ obtemos como uma conseqüência da mecânica relacional que $H_o^2/\rho_o \approx G$, resultado este confirmado pelos valores observacionais destas quantidades independentes uma da outra.

10.4 Testes Experimentais da Mecânica Relacional

Em princípio poderíamos testar uma força de Weber aplicada para a gravitação utilizando o resultado (8.8) que fornece a força exercida por uma casca esférica de massa $M = 4\pi R^2 \rho_g dR$ e raio R sobre uma partícula teste interna:

$$d\vec{F}_{Mm}(r < R) = -\frac{4\pi}{3} G \frac{\xi}{c^2} m_g \rho_g(R) R dR \left[\vec{a}_{mS} + \vec{\omega}_{MS} \times (\vec{\omega}_{MS} \times \vec{r}_{mS}) + 2\vec{v}_{mS} \times \vec{\omega}_{MS} + \vec{r}_{mS} \times \frac{d\vec{\omega}_{MS}}{dt} \right] .$$

Aqui $\vec{\omega}_{MS}$ é a velocidade angular da casca em relação a um referencial S. Já $\vec{r}_{mS}$, $\vec{v}_{mS}$ e $\vec{a}_{mS}$ são, respectivamente, o vetor posição, a velocidade e a aceleração de m_g em relação ao referencial S. O centro da casca também é a origem do sistema de coordenadas S.

Suponha agora que estamos no referencial terrestre numa situação tal que a relação (8.24) seja satisfeita. Envolvemos então uma partícula teste de massa gravitacional m_g por esta casca esférica de massa $M_g = 4\pi\rho_g R^2 dR$ em repouso em relação à Terra, enquanto que o corpo de prova é acelerado em relação a ela por outros corpos. A força exercida por esta casca sobre m_g é então dada por $-G\xi m_g M_g \vec{a}_{me}/3Rc^2$. A força gravitacional exercida pelas galáxias distantes sobre m_g na ausência da casca esférica é dada nesta aproximação de (8.24) por $-m_g\vec{a}_{me}$. Com a casca esférica ao redor de m_g a nova equação de movimento relacional fica na forma:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} - \frac{G\xi m_g M_g}{3Rc^2}\vec{a}_{me} - m_g\vec{a}_{me} = 0 .$$

Isto é,

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{jm} = m^*\vec{a}_{me} .$$

Aqui m^* pode ser considerada a massa inercial efetiva do corpo de prova envolto pela casca esférica. Ela é dada por

$$m^* \equiv m_g \left(1 + \frac{G\xi M_g}{3Rc^2}\right) .$$

Em princípio este aumento na massa inercial efetiva do corpo de prova envolto por uma casca esférica poderia ser testado experimentalmente. Deveríamos inicialmente estudar a aceleração de um corpo de prova sem estar envolvido pela casca esférica (por exemplo, acelerando uma partícula carregada por outras cargas, correntes e ímãs). Envolvemos então o corpo de prova por uma casca esférica neutra e aceleramos novamente o corpo de prova da mesma maneira pelos mesmos corpos (outras cargas, correntes e ímãs do exemplo anterior). Estudando sua nova aceleração, ela deve ser diferente do caso anterior sem a casca esférica. Isto é, a nova aceleração ou qualquer outro efeito dependente desta aceleração como o raio de curvatura do corpo de prova devem ter sido modificados. O problema é o pequeno valor deste aumento da massa inercial efetiva, cuja variação percentual é dada por:

$$\frac{m^* - m_g}{m_g} = \frac{G\xi M_g}{3Rc^2} .$$

Se temos uma casca esférica de massa 10 kg, raio 1 m e tomamos $\xi = 6$ isto resulta em $\approx 10^{-26}$, o que obviamente é indetectável.

Deve ser observado contudo que nada disto aconteceria nas mecânicas newtoniana ou einsteiniana. O motivo é que nestas teorias não há efeitos observáveis devidos a distribuições estacionárias e esfericamente simétricas de massa ao redor do corpo de prova.

Se tivéssemos envolvido o corpo de prova por uma distribuição anisotrópica de matéria (como um cubo ou cilindro ocos), a massa inercial efetiva seria diferente em diferentes direções. O próximo passo após testar a previsão anterior seria então testar esta anisotropia.

Também poderia ser possível testar esta anisotropia na massa inercial efetiva dos corpos de prova levando em conta as anisotropias já existentes na distribuição de matéria no universo. Como já vimos, a precessão do periélio dos planetas pode ser vista deste ponto de

vista, ou seja, como surgindo devido a anisotropia relacionada com a influência radial do Sol que não existe na direção tangencial da órbita. Se o corpo de prova está próximo da superfície terrestre, há a anisotropia devido a localização da Terra. A massa inercial efetiva de um corpo de prova movendo-se verticalmente deve ser diferente da massa inercial efetiva do mesmo corpo de prova movendo-se horizontalmente em relação a superfície terrestre. Pelo mesmo motivo a inércia de um corpo sendo acelerado na direção da Lua, do Sol, ou do centro de nossa galáxia deve ser diferente do que a inércia do mesmo corpo sendo acelerado num plano ortogonal a estas acelerações. Este efeito pode ser estimado observando uma força de Weber gravitacional, Eq. (8.4):

$$\vec{F}_{21} = -Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left[1 - \frac{\xi}{c^2}\left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12}\right)\right] .$$

Se a massa inercial efetiva de 1 quando movendo-se num plano ortogonal à linha reta conectando-o a 2 é $m_{it} = m_{g1}$, esta equação mostra que sua massa inercial efetiva quando acelerado na direção de 2 será dada pela seguinte ordem de grandeza: $m_{ir} = m_{g1}[1 + \xi Gm_{g2}/r_{12}c^2]$. A mudança percentual é então dada por:

$$\frac{m_{ir} - m_{it}}{m_{it}} \approx \frac{\xi Gm_{g2}}{r_{12}c^2} .$$

Vamos supor $\xi = 1$ aqui pois só nos interessam as ordens de grandeza. Com $m_{g2} = 3 \times 10^{41}\ kg$ = massa de nossa galáxia e $r_{12} = 2,5 \times 10^{20}\ m$ = distância do sistema solar ao centro de nossa galáxia obtemos: 9×10^{-7}. Isto é, deve haver uma diferença de uma parte em 10^6 comparando a inércia de um planeta ou de qualquer outro corpo sendo acelerado na direção do centro de nossa galáxia e sendo acelerado normalmente a esta direção. Com $m_{g2} = 2 \times 10^{30}\ kg$ = massa do Sol e $r_{12} = 1,5 \times 10^{11}\ m$ = nossa distância ao Sol obtemos: 3×10^{-8}. E com $m_{g2} = 6 \times 10^{24}\ kg$ = massa da Terra e $r_{12} = 6 \times 10^6\ m$ = raio terrestre obtemos: 7×10^{-10}. Isto mostra que podemos observar o efeito realizando experiências nas quais o corpo de prova move-se verticalmente ou horizontalmente em relação a superfície da Terra. Para este fim a precisão da experiência tem de ser da ordem de 10^{-9}.

Para estimar estes efeitos estamos supondo uma experiência só envolvendo efeitos gravitacionais. Além disto, estamos desprezando a influência do termo com $\dot{r}_{12}^2/c^2$ que pode mascarar o efeito que está sendo procurado. Análises e cálculos cuidadosos têm de ser feitos em cada caso específico antes de chegar a conclusões gerais.

Num artigo interessante publicado em 1958, Cocconi e Salpeter previram estas idéias considerando uma implementação geral do princípio de Mach, não necessariamente ligada com a força de Weber, [CS58]. Eles não mencionam a força de Weber nem o trabalho de Schrödinger mas apenas as idéias de Mach. De qualquer forma a força de Weber se encaixa muito bem no enfoque geral que eles utilizaram. Afinal de contas, eles consideraram a possibilidade de que a contribuição para a inércia de um corpo de prova de massa m resultando de sua interação com uma massa M separada de m por uma distância r tivesse as seguintes propriedades: Ser proporcional a M, cair como r^ν e depender do ângulo θ entre a aceleração do corpo de prova e a linha reta conectando-o a M. A componente da força de Weber que gera a inércia de um corpo tem estas propriedades com $\nu = 1$ já que ela é da forma $-Gm_{g1}M_{g2}\hat{r}_{12}\ddot{r}_{12}/r_{12}c^2$. Motivado por este artigo, muitas experiências foram realizadas ou reanalisadas tentando encontrar esta anisotropia na massa inercial dos corpos: [CS60], [She60], [Hug60], [Dre61], etc. Eles procuraram por anisotropias utilizando o efeito Zeeman num átomo, o efeito Mössbauer, ressonância magnética nuclear, ... Todas estas experiências deram um resultado nulo.

Como podemos explicar estes resultados negativos no contexto da mecânica relacional? A primeira resposta foi dada por Dicke ao observar que de acordo com o princípio de Mach este efeito tem de existir, mas que deve ser observado que esta anisotropia na massa inercial é universal, sendo a mesma para todas as partículas (incluindo os fótons e os píons), [Dic61]. Devido a esta universalidade da anisotropia, ela não poderia ser observada localmente. A segunda resposta foi dada por Edwards, que observou que o efeito de tal anisotropia sobre os instrumentos de medida locais têm de ser cuidadosamente considerados antes de concluir que a anisotropia da massa inercial foi descartada por estas experiências, [Edw74]. Concordamos com Dicke e com Edwards que temos de ser muito cuidadosos ao analisar

os resultados negativos destas experiências sob o prisma do princípio de Mach, antes de chegar a conclusões apressadas. Afinal de contas, como já vimos anteriormente, Schrödinger apontou corretamente que a precessão do periélio dos planetas pode ser considerada como sendo devido a anisotropia da massa inercial. Isto ocorreu numa situação puramente gravitacional. A conexão da gravitação com o eletromagnetismo é razoável e plausível. É possível que a gravitação e a inércia surjam de termos de quarta e sexta ordem em $\dot{r}/c$ na energia potencial eletromagnética, [Ass92c] e [Ass95d]. Se este é o caso, então a anisotropia na massa inercial pode ser a mesma que a anisotropia nas forças eletromagnéticas, de tal forma a eliminar a observação do efeito em experiências complexas como estas. O mesmo pode ser dito das forças nucleares, embora a conexão destas forças com as eletromagnéticas e gravitacionais ainda não seja completamente clara. O que deve ser mantido em mente é que ao menos em situações puramente gravitacionais o efeito da anisotropia da massa inercial efetiva foi encontrado, levando a precessão do periélio dos planetas.

Vamos ilustrar esta discussão com um exemplo simples. Supomos uma situação na qual a Eq. (8.24) é satisfeita, de tal forma que a força exercida pelas galáxias distantes sobre um corpo de prova pode ser escrita como $-m_g\vec{a}_{me}$. Suponhamos agora que sobre uma mesa sem atrito temos um corpo de massa gravitacional m_g oscilando horizontalmente ligado a uma mola de constante elástica k, Figura 10.1.

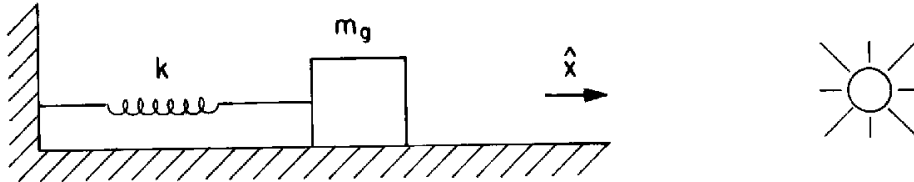



Figura 10.1: Oscilação alinhada com o Sol.

A força exercida pela mola sobre m_g é representada por $-k\vec{r} = -kx\hat{x}$, onde $\vec{r} = x\hat{x}$ é o vetor posição de m_g a partir do ponto de

equilíbrio da mola. A força gravitacional exercida pela Terra é contrabalançada pela força normal exercida pela mesa, tal que podemos esquecer estas duas forças. Analisamos aqui a influência do Sol na anisotropia da massa inercial efetiva de m_g. Na situação da Figura 10.1 temos o Sol alinhado com a oscilação do corpo de prova ao longo do eixo x. De acordo com a lei de Weber a força exercida pelo Sol de massa gravitacional M_g sobre m_g é dada pela Eq. (8.4). Utilizando os valores de $\dot{r}$ e $\ddot{r}$ em termos de $\vec{r}_{12}$, $\vec{v}_{12}$ e $\vec{a}_{12}$ esta força pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{Mm} = -GM_g m_g \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left\{ 1 + \frac{\xi}{c^2} \left[\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} \right] \right\} . \tag{10.12}$$

Para qualquer oscilação da mola ao redor do ponto de equilíbrio podemos considerar $r_{12} \approx R = constante$, onde R é a distância Terra-Sol. Como a massa do Sol é muito maior do que a massa m_g podemos desprezar seu movimento em relação ao referencial das estrelas fixas, de tal forma que $\vec{r}_2 = R\hat{x}$, $\vec{v}_2 = 0$ e $\vec{a}_2 = 0$. Como o corpo de prova está oscilando ao longo do eixo x podemos escrever: $\vec{r}_1 = x\hat{x}$, $\vec{v}_1 = \dot{x}\hat{x}$, $\vec{a}_1 = \ddot{x}\hat{x}$ e $\vec{r}_{12} \approx -R\hat{x}$. Considerando os termos de velocidade como pequenos, isto é, $(\dot{x}/c)^2 \ll 1$, a equação de movimento para m_g fica na forma:

$$GM_g m_g \frac{\hat{x}}{R^2} \left(1 - \frac{\xi R \ddot{x}}{c^2} \right) - kx\hat{x} - m_g \ddot{x}\hat{x} = 0 \ .$$

A força constante $GM_g m_g / R^2$ não muda a freqüência de oscilação mas apenas altera a posição de equilíbrio da mola, tal que não vamos considerá-la aqui. A equação de movimento com estas aproximações fica similar à equação de movimento newtoniana para um oscilador harmônico dada por $kx + m^* \ddot{x} = 0$, onde $m^* \equiv m_g(1 + \xi GM_g / Rc^2)$ é a massa inercial efetiva do corpo de prova. A solução desta equação é uma oscilação sinusoidal com uma freqüência dada por: $\omega_a = \sqrt{k/m^*}$.

Vamos considerar agora uma oscilação do corpo de prova ainda ao longo do eixo x, mas com o Sol localizado ao longo do eixo y, ver a Figura 10.2.

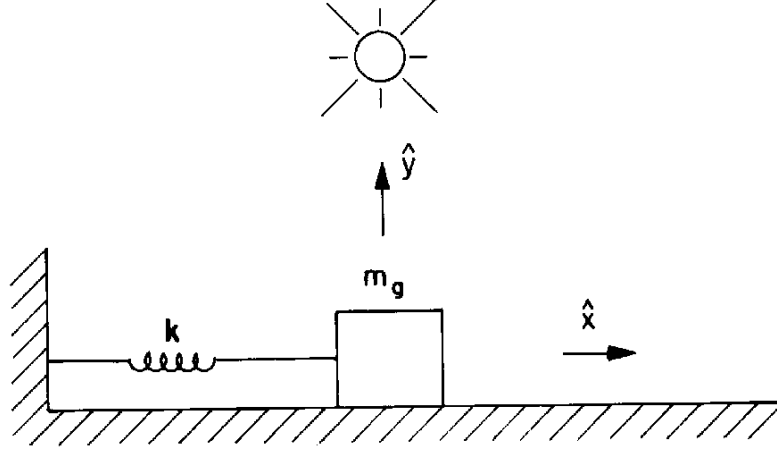



Figura 10.2: Oscilação ortogonal ao Sol.

A diferença da situação anterior é que agora devemos aproximar $\vec{r}_2 = R\hat{y}$, $\vec{r}_{12} = x\hat{x} - R\hat{y} \approx -R\hat{y}$, $\hat{r}_{12} = -\hat{y}$, onde estamos desprezando termos da ordem de x/R comparados com a unidade, ou seja, $x/R \ll 1$. A equação de movimento na direção x com as aproximações anteriores fica sendo $kx + m_g\ddot{x} = 0$. A solução é novamente sinusoidal com uma freqüência dada por $\omega_o = \sqrt{k/m_g}$. Este exemplo mostra que a freqüência de oscilação quando o corpo de prova está alinhado com o Sol deve ser diferente do caso em que esta oscilação é ortogonal ao Sol.

Alguns comentários críticos: Este exemplo simples ilustra muito claramente o efeito da componente da força que depende da aceleração do corpo de prova. A conseqüência é uma anisotropia na massa inercial efetiva, que neste caso seria vista por uma freqüência de oscilação dependendo da direção de vibração. Mas para chegar a este resultado várias coisas foram simultaneamente consideradas. Em primeiro lugar, a análise deveria ser realizada incluindo os termos de velocidade em $\dot{r}/c$. Neste caso, eles podem ser desprezados observando que na Eq. (10.12) estamos comparando termos da ordem de $\dot{x}^2$ com outros termos da ordem de $R\ddot{x}$. A solução da equação de movimento é essencialmente $x = A\sin\omega t$, tal que $\dot{x} = A\omega\cos\omega t$

e $\ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t$. Assim, $\dot{x}^2 \approx A^2\omega^2 \ll R\ddot{x} \approx RA\omega^2$, já que a distância Terra-Sol é muito maior do que a amplitude de oscilação. Apesar deste fato deve sempre ser lembrado que a força de Weber depende não apenas da aceleração entre os corpos mas também de suas velocidades e estes termos podem ser relevantes em algumas experiências. Uma outra coisa foi utilizada nesta análise: Supomos a constante elástica k sempre a mesma, independente da direção do Sol. A dimensão de k é kg/s^2, tal que pode acontecer de seu valor também ser anisotrópico. Isto é, se a massa inercial do corpo de prova é anisotrópica o mesmo pode acontecer com a constante elástica da mola já que embutido nesta constante há algo com a dimensão de massa. O mesmo pode acontecer com as forças eletromagnéticas e nucleares. Se estas anisotropias se equiparam àquelas da massa inercial, o efeito seria mascarado. Apenas experiências podem decidir a questão aqui, mostrando se vão ou não existir anisotropias na freqüência de oscilação. Mas estas possibilidades devem ser lembradas.

Um outro teste experimental foi sugerido por Eby em 1979, [Eby79]. Ele calculou essencialmente a precessão de um giroscópio utilizando a energia lagrangiana de Weber aplicada para a gravitação (sem estar ciente da eletrodinâmica de Weber). Ele obteve uma precessão geodética e uma outra devido ao movimento (*geodetic and motional precessions*) que diferiam daquelas da relatividade geral por fatores de 2 e 3/2, respectivamente. Em primeiro lugar, sua análise deve ser checada independentemente e então as experiências devem ser realizadas para tentar distinguir estas teorias. É interessante ver o que ele disse ao discutir estas previsões (nossas palavras entre colchetes): "É conceitualmente satisfatório que nestas teorias [como a mecânica relacional que ele está construindo baseada numa lei do tipo da de Weber] é claro em relação a quê o giroscópio está precessando, a saber, a matéria distante. Isto não é o caso nas teorias métricas da gravidade [como a teoria da relatividade de Einstein] já que não há matéria distante explicitamente incluída na métrica de Schwarzschild ou em sua equivalente."

Uma outra coisa extremamente importante a ser testada diretamente é a existência ou não de um decaimento exponencial na gravitação. Isto não está ligado diretamente com a mecânica relacional ou

com o princípio de Mach, mas como vimos, se temos um decaimento exponencial na energia potencial newtoniana é razoável suspeitar que um termo análogo deve existir multiplicando ambos os termos da energia potencial de Weber, ver a Eq. (8.5). Experiências para testar o termo de Seeliger-Neumann foram realizadas desde o século passado, com algumas delas dando resultados positivos. Analisamos este assunto em [Ass92f]. Ver também [Mar86]. Sugerimos especialmente a repetição das várias experiências de Q. Majorana sobre este assunto: [Maj20], [Maj30], [Maj88a] e [Maj88b].

Muitos outros testes vão aparecer ao longo do tempo à medida em que mais pessoas comecem a trabalhar com estas linhas de pesquisa.

Capítulo 11

História da Mecânica Relacional

Agora que já apresentamos a mecânica relacional e os principais resultados obtidos com ela, mostramos em perspectiva os principais passos levando à sua descoberta.

Como já vimos, Leibniz, Berkeley e Mach visualizaram claramente os principais aspectos qualitativos de uma mecânica relacional. Mas nenhum deles a implementou quantitativamente. Apresentamos aqui uma breve história da implementação quantitativa da mecânica relacional. Para referências e uma discussão adicional, ver [Ass94, Seções 7.5 a 7.7].

11.1 Gravitação

Embora Newton tenha tido as primeiras percepções sobre a gravitação em seus *Anni Mirabilis* de 1666-1667, a formulação clara e completa da gravitação universal parece só ter surgido em 1685, após uma correspondência com Hooke em 1879-1880, [Coh80], Cap. 5 e [Coh81]. Sua força da gravitação apareceu publicada pela primeira vez apenas em seu livro *Principia* de 1687. Hoje em dia a escrevemos na forma

$$\vec{F}_{21} = -Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} .$$

Hooke e outros tinham a idéia de uma força gravitacional caindo com o inverso do quadrado da distância entre o Sol e os planetas. Mas é incrível como Newton chegou na universalidade desta força e que ela deve ser proporcional ao produto das massas. Para chegar a este último resultado foi essencial sua terceira lei do movimento, a lei de ação e reação. Vimos isto na Seção 1.2 ao apresentar algumas citações de Newton.

Newton defendia as idéias de espaço e tempo absolutos. Apesar deste fato, sua força gravitacional é a primeira expressão relacional

que surgiu na ciência descrevendo as interações entre corpos materiais. Ela depende apenas da distância entre os corpos interagentes e está direcionada ao longo da reta que os une.

A introdução da função potencial escalar na gravitação é devido a Lagrange (1736-1813) em 1777 e a Laplace (1749-1827) em 1782. A energia potencial gravitacional pode ser expressa como:

$$U_{12} = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}} \ .$$

Mais uma vez esta expressão é completamente relacional. Para obter a força exercida por 2 sobre 1 utilizamos o procedimento: $\vec{F}_{21} = -\nabla_1 U_{12}$.

O paradoxo gravitacional que aparece com a lei de Newton num universo infinito foi descoberta por H. Seeliger e C. Neumann em 1895-1896. A solução que eles apresentaram foi introduzir um decaimento exponencial no potencial gravitacional devido a cada ponto material.

11.2 Eletromagnetismo

Coulomb chegou na força entre duas cargas pontuais em 1785. Há uma tradução parcial para o inglês de seus trabalhos em [Cou35a] e [Cou35b]. A força de Coulomb pode ser expressa como:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \ .$$

Ele também chegou numa expressão relacionando a força entre dois pólos magnéticos q_1^m e q_2^m dada por:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_o}{4\pi}q_1^m q_2^m\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \ .$$

Estas duas expressões são completamente relacionais, já que têm a mesma estrutura que a força de Newton gravitacional.

Parece que Coulomb chegou na força entre as cargas pontuais mais por analogia com a lei da gravitação de Newton do que por suas medidas duvidosas com a balança de torsão, [Hee92]. Ele realizou apenas três medidas de atração e três de repulsão, mas seus

resultados não puderam ser reproduzidos quando suas experiências foram repetidas recentemente. Além disto, ele nunca testou a proporcionalidade da força em q_1q_2. Em suas experiências ele alterava a distância entre os corpos, mas não a quantidade de carga em cada um. Aparentemente ele nunca se preocupou em testar se a força era de fato proporcional a q_1q_2. Em princípio as forças elétricas poderiam se comportar como $q_1 + q_2$, ou como $(q_1q_2)^n$ com um expoente n diferente de 1. Apenas experiências podiam decidir isto, mas ele não as realizou. Mas no fim a lei de força que ele propôs provou ser extremamente boa para explicar muitos fenômenos. É curioso ver como ele apresenta a força magnética entre os pólos magnéticos: "O fluido magnético age por atração ou repulsão numa razão composta diretamente da densidade do fluido e inversamente do quadrado da distância entre as moléculas. A primeira parte desta proposição não precisa ser provada; vamos passar para a segunda (...)" [Cou35b]. Ou seja, ele acha que não é necessário provar que a força é proporcional a $q_1^m q_2^m$. Isto está em contraste muito grande com o cuidado que Newton tomou e aos vários argumentos que empregou para chegar que a força gravitacional era proporcional a m_1m_2, ver [Fre89].

Em analogia com o potencial gravitacional proposto por Lagrange e Laplace, Poisson introduziu o potencial escalar no eletromagnetismo em 1811-1813. As energias de interação entre duas cargas pontuais ou entre dois pólos magnéticos são então dadas por

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r_{12}} \ ,$$

$$U_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q_1^m q_2^m}{r_{12}} \ .$$

Em 1820 Oersted descobriu experimentalmente o desvio de uma agulha magnetizada interagindo com um fio com corrente elétrica. Fascinado por este fato, Ampère (1775-1836) realizou uma série de experiências clássicas e chegou no período entre 1820 a 1826 na seguinte expressão descrevendo a força exercida por um elemento de corrente $I_2 d\vec{l}_2$ localizado em $\vec{r}_2$ sobre um outro elemento de corrente $I_1 d\vec{l}_1$ localizado em $\vec{r}_1$:

$$d^2\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left[2(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) - 3(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)\right] .$$

Mais uma vez esta força é completamente relacional. E mesmo aqui a influência de Newton foi muito grande, embora esta força seja muito mais complexa do que a newtoniana: A força de Ampère depende também dos ângulos entre os elementos de corrente e entre cada um deles e a reta os unindo. Para chegar nesta expressão Ampère assumiu explicitamente a proporcionalidade da força em $I_1 d\vec{l}_1$ e $I_2 d\vec{l}_2$. Também assumiu que ela deveria obedecer a lei de ação e reação com a força ao longo da reta ligando os elementos. Estes fatos não vieram de nenhuma de suas experiências. Mas como tinha acontecido com a força de Coulomb, a força de Ampère teve um sucesso enorme em explicar muitos fenômenos da eletrodinâmica.

Apresentamos aqui algumas afirmações de Ampère mostrando a grande influência exercida pela força gravitacional de Newton sobre ele. Citamos de seu principal trabalho com que coroa suas pesquisas: "Sobre a teoria matemática dos fenômenos eletrodinâmicos, deduzida experimentalmente", [Amp58]. Este trabalho foi publicado nas Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris para o ano de 1823. Apesar desta data o volume só foi publicado em 1827. Na versão impressa foram incorporadas comunicações que ocorreram após 1823 e o artigo de Ampère é datado de 30 de agosto de 1826. Este trabalho já foi parcialmente traduzido para o inglês: [Tri65], págs. 155-200. O artigo começa assim:

> A nova era na história da ciência marcada pelos trabalhos de Newton é não apenas a época da descoberta mais importante do homem sobre as causas dos fenômenos naturais, ela é também a época na qual o espírito humano abriu um novo caminho nas ciências que têm os fenômenos naturais como seu objeto de estudo.
>
> Até Newton, as causas dos fenômenos naturais foram procuradas quase que exclusivamente no impulso de um fluido desconhecido que forçava as partículas dos materiais na mesma direção que suas próprias partículas; sempre que ocorria um movimento rotacional, era imaginado um vórtice na mesma direção.

Newton nos ensinou que movimento deste tipo, assim como todos os movimentos na natureza, têm de ser reduzidos por cálculo a forças agindo entre duas partículas materiais ao longo da linha reta entre elas tal que a ação de uma sobre a outra seja igual e oposta à força que a última exerce sobre a primeira e, consequentemente, assumindo que estas duas partículas estejam associadas permanentemente, que nenhum movimento pode resultar de suas interações mútuas. É esta lei, confirmada hoje em dia por toda observação e por todo cálculo, que ele representou nos três axiomas no início do *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Mas não era suficiente criar o conceito, a lei que governa a variação destas forças com as posições das partículas entre as quais elas agem, tinha de ser encontrada ou, o que é a mesma coisa, o valor destas forças tinha de ser expresso por uma fórmula.

Newton estava longe de pensar que esta lei poderia ser descoberta de considerações abstratas, não importando quão plausíveis elas pudessem ser. Ele estabeleceu que tais leis devem ser deduzidas dos fatos observados ou, preferentemente, de leis empíricas, como aquelas de Kepler, que são apenas os resultados gerais de muitos fatos.

O caminho que Newton seguiu foi o de observar inicialmente os fatos, variando as condições tanto quanto possível, acompanhando isto com medidas precisas, para deduzir leis gerais baseadas apenas na experiência e deduzir delas, independentemente de todas as hipóteses no que diz respeito à natureza das forças que produzem os fenômenos, o valor matemático destas forças, isto é, derivar a fórmula que as representa. Este foi o enfoque adotado geralmente pelos homens cultos da França a quem a física deve o imenso progresso que foi feito nos tempos recentes e, similarmente, ele me guiou em todas as minhas pesquisas sobre os fenômenos eletrodinâmicos. Baseei-me apenas na experimentação para estabelecer as leis dos fenômenos e delas derivei a única fórmula que pode re-

> presentar as forças que são produzidas; não investiguei a possível causa destas forças, convencido de que toda pesquisa desta natureza tem de proceder de um conhecimento experimental puro das leis e do valor, determinado apenas por dedução destas leis, das forças individuais na direção que é, necessariamente, ao longo da linha reta ligando os pontos materiais entre os quais ela age. (...)

Aqui vai o início de sua explicação de como chegou em sua fórmula descrevendo a força entre elementos de corrente ([Amp58] e [Tri65], pág. 172):

> Explicarei agora como deduzir rigorosamente a partir destes casos de equilíbrio a fórmula pela qual represento a ação mútua de dois elementos de corrente voltaica, mostrando que esta é a única força que, agindo ao longo da linha reta conectando seus pontos médios, pode concordar com os fatos da experiência. Em primeiro lugar, é evidente que a ação mútua de dois elementos de corrente elétrica é proporcional a seus comprimentos; pois, assumindo-os divididos em partes infinitesimais iguais ao longo de seus comprimentos, todas as atrações e repulsões de suas partes podem ser consideradas como direcionadas ao longo de uma única linha reta, de tal forma que elas necessariamente se adicionam. Esta ação tem também de ser proporcional às intensidades das duas correntes. (...)

É evidente a influência da lei de Newton da gravitação aqui, já que Ampère assumiu a força como estando ao longo da linha reta ligando os elementos ($\hat{r}_{12}$) e proporcional a $I_1 dl_1 I_2 dl_2$. Ele então continuou derivando a partir de suas experiências que esta força entre elementos de corrente tem de cair como r^2 e ser proporcional a $2(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) - 3(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)$.

Para um estudo interessante sobre a controvérsia entre Ampère e Biot (que não aceitava a idéia de Ampère de força entre elementos infinitesimais de corrente), ver [Abr89].

O primeiro a testar diretamente o fato de que a força era proporcional a $I_1 I_2$ foi W. Weber em 1846-1848, [Web46], [Web48] e

[Web66]. Com este fim ele mediu diretamente as forças entre circuitos com corrente utilizando o eletrodinamômetro que ele próprio inventou. Ampère nunca mediu as forças diretamente e utilizava apenas métodos de equilíbrio nulos que não geravam forças.

Já foram propostas ou derivadas muitas energias de interação entre dois elementos de corrente. Elas podem ser resumidas, seguindo Helmholtz, pela expressão (ver [Woo68], [Wis81], [Arc89], [Gra85] e [BA95]):

$$d^2U_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I_1 I_2}{r}\left[\frac{1+k}{2}(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) + \frac{1-k}{2}(\hat{r} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r} \cdot d\vec{l}_2)\right] . \qquad (11.1)$$

Aqui k é uma constante adimensional. Embora F. Neumann tenha trabalhado apenas com circuitos fechados, podemos dizer que sua energia de interação entre elementos de corrente seria dada por esta equação com $k = 1$. A eletrodinâmica de Weber a ser discutida em seguida fornece esta energia com $k = -1$, ver [Ass94, Seção 4.6]. A eletrodinâmica de Maxwell fornece esta energia com $k = 0$. E mais recentemente Graneau propôs uma expressão como esta com $k = 5$, [Gra85]. Independente do valor de k, todas estas energias são relacionais.

Embora a maior parte dos livros-texto apresente a expressão de Neumann como representando a energia de interação entre dois elementos de corrente na teoria de Maxwell, este não é o caso. A energia de interação de acordo com Maxwell é realmente dada por $k = 0$ e não $k = 1$: [Woo68], [Wis81], [Arc89]. Isto pode ser visto utilizando a energia lagrangiana de Darwin de 1920 que descreve a interação entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 localizdas em $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, movendo-se com velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Ela é a lagrangiana do eletromagnetismo clássico (teoria de Maxwell-Lorentz) incluindo as correções relativísticas, o tempo retardado e os efeitos de radiação, correta até segunda ordem em v/c, inclusive. Ela é dada por ([Dar20], [Jac75, Seção 12.7, págs. 593-595]; [Ass94, Seção 6.8] e [Ass95b, Seção 1.6]):

$$U_{12}^D = U_{21}^D = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r_{12}}\left[1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_1 \cdot \hat{r}_{12})(\vec{v}_2 \cdot \hat{r}_{12})}{2c^2}\right] .$$

Suponhamos os elementos de corrente neutros compostos de car-

gas positivas e negativas: $dq_{1-} = -dq_{1+}$ e $dq_{2-} = -dq_{2+}$. A energia para trazer os elementos de uma distância infinita um do outro até a separação final r_{12} é dada por:

$$d^2U_{12} = d^2U_{2+,1+} + d^2U_{2+,1-} + d^2U_{2-,1+} + d^2U_{2-,1-} \ .$$

Utilizando que $I_1 d\vec{l}_1 \equiv dq_{1+}\vec{v}_{1+} + dq_{1-}\vec{v}_{1-}$, $I_2 d\vec{l}_2 \equiv dq_{2+}\vec{v}_{2+} + dq_{2-}\vec{v}_{2-}$, a neutralidade elétrica dos elementos e a lagrangiana de Darwin obtemos a Eq. (11.1) com $k = 0$.

Ao tentar unificar a eletrostática com a eletrodinâmica, de forma a poder derivar as forças de Coulomb e de Ampère de uma única expressão, W. Weber propôs em 1846 que a força exercida pela carga pontual q_2 sobre a carga pontual q_1 fosse dada por:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2} \right) . \tag{11.2}$$

Em 1848 ele propôs uma energia de interação de onde esta força poderia ser derivada, a saber:

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r_{12}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) . \tag{11.3}$$

Para referências e discussões detalhadas sobre a eletrodinâmica de Weber e suas aplicações ver os trabalhos já citados e: [Ass90a], [Ass90b], [Ass91a], [Ass91b], [Ass92g], [Ass92d], [AC93], [GA94], [Ass95a], [Ass95e], [Ass95c], [AB95], [AB96]; assim como os livros [Ass92b], [Ass94] e [Ass95b].

É importante observar que Weber partiu diretamente da eletrostática (força de Coulomb) e da força de Ampère entre elementos de corrente para chegar em (11.2). Com isto indiretamente ele estava sendo influenciado pela lei de Newton da gravitação, já que tanto Coulomb quanto Ampère foram diretamente influenciados por ela.

As expressões (11.2) e (11.3) são mais uma vez completamente relacionais. Apesar deste fato elas apresentam grandes diferenças quando comparadas com a lei de Newton da gravitação devido a dependência na velocidade e aceleração das cargas. Esta foi a primeira vez na física que se propôs uma força que dependia da velocidade e

aceleração entre os corpos interagentes. Mais tarde surgiram muitas outras propostas no eletromagnetismo descrevendo a força entre cargas pontuais como a de Gauss (desenvolvida em 1835 mas publicada apenas em 1877), a de Riemann (desenvolvida em 1858 mas publicada apenas em 1867), a de Clausius em 1876 e a de Ritz em 1908, [Ass94, Apêndice B, Alternative Formulations of Electrodynamics] e [Ass95b, Apêndice C, Formulações Alternativas]. Além das diferenças nas formas, há uma grande distinção entre a expressão de Weber e todas estas outras: Apenas a força de Weber é completamente relacional, dependendo somente da distância, velocidade radial relativa e aceleração radial relativa entre as cargas pontuais e tendo assim o mesmo valor para todos os observadores e sistemas de referência. Por outro lado, as outras expressões dependem da velocidade e aceleração da carga teste ou em relação a um meio privilegiado como o éter, ou em relação ao observador ou a um sistema de referência abstrato. Também a força de Lorentz de 1895 pôde ser escrita na forma de uma interação entre cargas pontuais a partir dos trabalhos de Lienard, Wiechert, Schwarzschild e Darwin. Quando isto é feito também aparecem velocidades e acelerações das cargas em relação ao éter (como pensava Lorentz) ou em relação aos observadores ou sistemas de referência inerciais (interpretação introduzida por Einstein). Isto é, mais uma vez não é a velocidade e aceleração entre as cargas que interessa, mas sim o movimento delas em relação a algo externo, seja este algo externo um meio material, um observador, ou um sistema de referência. Apenas a eletrodinâmica de Weber é completamente relacional. Por isto ela é compatível com a mecânica relacional apresentada neste livro.

Em 1868 C. Neumann chegou na energia lagrangiana que descreve a eletrodinâmica de Weber, a saber:

$$S_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r_{12}}\left(1 + \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right) . \tag{11.4}$$

A lagrangiana de um sistema de dois corpos podia então ser escrita como $L \equiv T - S_{12}$, onde $T = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$ é a energia cinética do sistema. Deve ser observado a mudança de sinal em frente de $\dot{r}_{12}$ quando comparamos U_{12} e S_{12}. A energia lagrangiana S_{12} também é

completamente relacional.

Em 1872 Helmholtz (1821-1894) obteve que a energia de uma carga teste q interagindo com uma casca esférica dielétrica de raio R carregada uniformemente com uma carga Q de acordo com a eletrodinâmica de Weber é dada por, [Hel72]:

$$U_{qQ} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R}\left(1 - \frac{v^2}{6c^2}\right) . \tag{11.5}$$

Para chegar nesta expressão Helmholtz supôs a casca esférica parada e a carga q movendo-se com velocidade $\vec{v}$ em relação a casca esférica, num ponto qualquer de seu interior.

Uma expressão análoga obtida com uma lei de Weber aplicada à gravitação é a chave para a implementação do princípio de Mach, como já vimos. Deve se lembrar que as idéias de Mach sobre a mecânica tinham sido publicadas desde 1868. Fazendo uma analogia com o cálculo de Helmholtz e o aplicando para uma energia potencial gravitacional weberiana e sendo as estrelas fixas e galáxias distantes consideradas como um conjunto de cascas esféricas ao redor do sistema solar, esta energia de interação fica sendo exatamente a energia cinética da mecânica newtoniana. Mas Helmholtz sempre teve um ponto de vista negativo em relação à eletrodinâmica de Weber. Ao invés de considerar este resultado que ele mesmo obteve como uma sugestão para a origem da energia cinética mecânica, ele apresentou este resultado como uma falha da eletrodinâmica de Weber. Maxwell apresentou as críticas de Helmholtz à eletrodinâmica de Weber em seu *Treatise* de 1873, [Max54], Vol. 2, Cap. 23. Este último capítulo do livro de Maxwell já se encontra totalmente traduzido para o português, com discussões: [Ass92h]. Maxwell também não percebeu que o resultado de Helmholtz era a chave para desvendar o enigma da inércia. O mesmo pode ser dito de todos os leitores de Maxwell no final do século passado e durante todo este século, pois tinham disponíveis não apenas este resultado de Helmholtz mas também os livros de Mach. Discutimos isto em detalhes em [Ass94], Seção 7.3 (Casca Esférica Carregada) e não entraremos em maiores detalhes aqui. Diremos apenas que Helmholtz e Maxwell perderam uma chance de ouro para criar a mecânica relacional utilizando um

resultado análogo a este na gravitação. Felizmente Schrödinger e outros obtiveram resultados similares e estavam preparados para retirar todas as conseqüências importantes destes fatos.

11.3 Lei de Weber Aplicada para a Gravitação

Devido ao grande sucesso da eletrodinâmica de Weber em explicar os fenômenos da eletrostática (através da força de Coulomb) e da eletrodinâmica (força de Ampère, lei de indução de Faraday etc.) algumas pessoas tentaram aplicar uma expressão análoga para a gravitação. Era o pêndulo oscilando de volta. Após a grande influência da lei da gravitação universal de Newton sobre Coulomb e Ampère, chegou o tempo de a gravitação passar a ser influenciada pelo eletromagnetismo.

A idéia é que a força exercida pela massa gravitacional m_{g2} sobre m_{g1} deve ser dada por:

$$\vec{F}_{21} = -Gm_{g1}m_{g2}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left(1 - \frac{\xi\dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{\xi r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2}\right) . \qquad (11.6)$$

A energia de interação seria então dada por:

$$U_{12} = -Gm_{g1}m_{g2}\frac{1}{r_{12}}\left(1 - \frac{\xi\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right). \qquad (11.7)$$

Analogamente a energia lagrangiana seria:

$$S_{12} = -Gm_{g1}m_{g2}\frac{1}{r_{12}}\left(1 + \frac{\xi\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right) . \qquad (11.8)$$

O primeiro a propor uma lei de Weber para a gravitação parece ter sido G. Holzmuller em 1870, [Nor65], pág. 46. Então em 1872 Tisserand estudou uma força de Weber aplicada para a gravitação e sua aplicação na precessão do periélio dos planetas, [Tis72]. O problema de dois corpos na eletrodinâmica de Weber tinha sido resolvido exatamente por Seegers em 1864, em termos de funções elípticas, [Nor65], pág. 46. Mas Tisserand resolveu o problema de dois corpos

por aproximações iterativas, mais ou menos como apresentado neste livro.

Outras pessoas também trabalharam com uma lei de Weber aplicada para a gravitação aplicando-a ao problema da precessão do periélio dos planetas: Paul Gerber em 1898 e 1917, Erwin Schrödinger em 1925, Eby em 1977 e nós mesmos em 1989: [Ger98], [Ger17], [Sch25] (tradução para o português em [XA94], [Eby77] e [Ass89a]. Curiosamente nenhum destes autores (com exceção do nosso artigo) estava ciente da existência da eletrodinâmica de Weber. Cada um deles chegou nas Eqs. (11.7) ou (11.8) por si próprios. Gerber estava trabalhando com idéias de tempo retardado e trabalhou na formulação lagrangiana. Schrödinger estava tentando implementar o princípio de Mach com uma teoria relacional. Eby estava seguindo os trabalhos de Barbour sobre o princípio de Mach e também trabalhou com a formulação lagrangiana.

Poincaré discutiu o trabalho de Tisserand sobre uma lei de Weber aplicada para a gravitação em 1906-1907, [Poi53], págs. 125 e 201-203. Os trabalhos de Gerber foram criticados por Seeliger, que estava ciente da eletrodinâmica de Weber, [See17].

Para referências sobre outras pessoas trabalhando com uma lei de Weber aplicada para a gravitação na segunda metade deste século, ver [Ass94], Seção 7.5.

Deve ser enfatizado que o próprio Weber considerou a aplicação de sua força para a gravitação. Trabalhando em colaboração com F. Zollner nas décadas de 1870 e 1880 ele aplicou as idéias de Young e Mossotti de derivar a gravitação do eletromagnetismo (não temos certeza se eles têm trabalhos neste sentido anteriores aos de Holzmuller em 1870 e de Tisserand em 1872). Mas ao invés de trabalhar com a força de Coulomb, eles empregaram a força de Weber entre cargas elétricas. Assim, o resultado final que obtiveram foi uma lei de Weber para a gravitação em vez de simplesmente uma lei de Newton gravitacional, como tinham obtido Young e Mossotti: [Woo76] e [Wis81].

Com exceção de Schrödinger e Eby, os outros autores que trabalharam com uma lei de Weber aplicada para a gravitação citados aqui não estavam preocupados em implementar o princípio de Mach.

11.4 Mecânica Relacional

Mach sugeriu que a inércia de um corpo devia estar ligada com a matéria distante e especialmente com as estrelas fixas (em seu tempo as galáxias externas ainda não eram conhecidas). Ele não discutiu ou enfatizou a proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais. Ele não disse que a inércia deveria estar ligada com uma interação *gravitacional* com as massas distantes. E ele não propôs nenhuma lei de força específica para implementar suas idéias quantitativamente (mostrando, por exemplo, que um céu de estrelas girando geraria forças centrífugas). Contudo, seu livro *A Ciência da Mecânica* foi extremamente influente no que diz respeito à física, muito mais do que os escritos de Leibniz e Berkeley. Ele foi publicado em 1883 e a partir desta data as pessoas começaram a tentar implementar suas idéias intuitivas, que eram muito atraentes.

O primeiro a propor uma lei de Weber para a gravitação com o intuito de implementar o princípio de Mach parece ter sido I. Friedlaender em 1896. Esta sugestão apareceu numa nota de rodapé na página 17 do livro dos irmãos Friedlaender, em que cada uma das partes foi escrita por um deles, [FF96]. Uma tradução parcial para o inglês deste livro se encontra em [FF95]. Immanuel Friedlaender começa falando da força centrífuga (tendência a se afastar do centro de rotação) que aparece quando giramos algum corpo em relação a Terra. Afirma então que deve ser possível invertê-la. Isto é, que a força centrífuga deve aparecer se giramos no sentido contrário a Terra juntamente com o universo em relação ao corpo de prova. Ele acredita que a mecânica newtoniana não é completa por não fornecer esta equivalência. Então vem o trecho que nos interessa aqui: "(...) parece a mim que a forma correta da lei da inércia só será encontrada quando for derivada, com base em uma *lei unificada*, a *inércia relativa* como um efeito das massas umas sobre as outras e a *gravitação*, que também é um efeito das massas umas sobre as outras.[12] O desa-

[12]Em relação a isto é altamente desejável que seja resolvida a questão de saber se a lei de Weber é para ser aplicada a gravitação e também a questão da velocidade de propagação da gravitação. Em relação ao segundo ponto, pode-se usar um instrumento que torna possível medir estaticamente as variações diurnas da gravidade terrestre como uma função da posição dos corpos celestes.

fio aos teóricos e calculistas para tentar isto só vai ser coroado com sucesso quando for demonstrado com êxito a invertibilidade da força centrífuga." Esta foi apenas uma sugestão que não chegou a ser desenvolvida. Apesar deste fato, ela foi importante em pelo menos dois sentidos: Eles foram os primeiros a sugerir num texto impresso que a inércia é devido a uma interação *gravitacional* e eles propuseram a lei de Weber como o tipo de interação com a qual se trabalhar. A inversão da força centrífuga, ou seja, a equivalência dinâmica para situações cinematicamente equivalentes, é implementada de forma completa na mecânica relacional, como vimos neste livro.

Em 1900 Höfler também sugere que se aplique uma lei de Weber para a gravitação com o sentido de implementar o princípio de Mach, [Nor95, págs. 21 e 41]. Novamente esta sugestão não chegou a ser desenvolvida.

Em 1904 W. Hofmann propôs substituir a energia cinética $m_i v^2/2$ por uma interação entre dois corpos dada por $L = kMmf(r)v^2$, sendo k uma constante, $f(r)$ alguma função da distância entre os corpos de massas M e m e sendo v a velocidade relativa entre M e m. Seu trabalho está discutido em [Nor95], sendo que uma tradução parcial para o inglês de seu trabalho se encontra em [Hof95]. O resultado usual $mv^2/2$ seria obtido após integrar L sobre todas as massas no universo. Hofmann não completou a implementação desta idéia qualitativa. Seu trabalho é importante porque ele está considerando uma interação do tipo da de Weber (ver a Eq. (11.7)) para chegar na energia cinética, embora ele não tenha especificado a função $f(r)$. Ele também parece que não conhecia a eletrodinâmica de Weber.

Embora Einstein tenha sido grandemente influenciado pelo livro de Mach sobre a mecânica, ele não tentou empregar uma expressão relacional para a energia ou força entre massas. Ele nunca mencionou a força ou a energia potencial de Weber. Todos aqueles que se deixaram levar pela linha de raciocínio de Einstein ficaram muito longe da mecânica relacional. Por este motivo não os consideraremos aqui.

Após os Friedlaender, Höfler e Hofmann, uma outra pessoa importante tentando implementar o princípio de Mach utilizando quantidades relacionais foi Reissner. Sem estar ciente do trabalho de Weber

ele chegou independentemente a uma energia potencial muito similar à de Weber aplicada para a gravitação, [Rei14] (tradução para o inglês em [Rei95b]) e [Rei15] (tradução parcial para o inglês em [Rei95a]). No artigo de 1914 ele trabalha com uma energia potencial newtoniana mais um termo do tipo $m_1 m_2 f(r)\dot{r}^2$, particularizado para $f(r) = constante$, sendo que em 1915 substitui este termo pelo weberiano $m_1 m_2 \dot{r}^2/r$. Infelizmente de 1916 em diante ele começou a desenvolver as idéias de Einstein sobre a relatividade geral e não trabalhou mais com grandezas relacionais, [Rei16] e [Nor95, pág. 33].

Erwin Schrödinger tem um artigo muito importante de 1925 onde ele chegou nos principais resultados da mecânica relacional, [Sch25].

Neste artigo Schrödinger diz que quer implementar as idéias de Mach. Ele menciona o fato de que a teoria da relatividade geral de Einstein não implementa estas idéias e por este motivo ele tenta um enfoque diferente. Tomando a forma da energia cinética $mv^2/2$ como guia ele propõe uma forma modificada da energia potencial newtoniana, a saber:

$$U = -\frac{Gm_1 m_2}{r}\left(1 - \gamma\dot{r}^2\right) . \tag{11.9}$$

Para chegar nesta expressão ele enfatiza explicitamente o aspecto de que qualquer energia de interação deve depender apenas da distância e velocidade relativas entre as partículas interagentes para assim ser coerente com as idéias de Mach. Isto é, velocidades absolutas não devem aparecer, apenas grandezas relacionais. Curiosamente ele nunca menciona o nome de Weber ou a sua lei, embora ele fosse uma pessoa de língua alemã. Ele integra esta energia para uma casca esférica de massa M e raio R interagindo com uma massa pontual interna m próxima do centro e movendo-se em relação a ele com uma velocidade v. Com isto obtém o resultado aproximado

$$U = -G\frac{mM}{R}\left(1 - \frac{\gamma v^2}{3}\right) .$$

Ele não sabia disto, mas este resultado aproximado é válido exatamente qualquer que seja a posição da partícula teste no interior da casca, como Helmholtz havia mostrado em 1872 (trabalhando com

cargas ao invés de massas, mas a conseqüência é a mesma). Schrödinger identifica este resultado com a energia cinética do corpo de prova e chega nos principais resultados da mecânica relacional, a saber: proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais, o melhor referencial inercial é o referencial das massas distantes etc. Ele então considera um problema de "dois corpos" (o Sol, um planeta e as massas distantes) e chega na precessão do periélio dos planetas. Como vimos, outros haviam chegado neste resultado antes dele, mas ele não cita ninguém. Para chegar no resultado einsteiniano que se sabia concordar com os dados observacionais, Schrödinger obtém $\gamma = 3/c^2$. Ele então integra o resultado da casca esférica para todo o universo até um raio R_o, supondo uma densidade de matéria constante ρ_o e obtém a relação (8.19), a saber: $G = c^2/4\pi\rho_o R_o^2$. Ele observa que tomando R_o e ρ_o como sendo o raio e a densidade de nossa galáxia, respectivamente, obteríamos um valor de G menor do que 10^{11} vezes aquele conhecido. Sua conclusão é então de que a inércia dos corpos no sistema solar é devido principalmente a uma matéria que está bem afastada de nossa galáxia. Para que esta equação fosse verdadeira, como era necessário para implementar o princípio de Mach, R_o precisaria ser muito maior do que todas as outras distâncias astronômicas conhecidas em seu tempo. É curioso observar que a existência de galáxias externas tinha acabado de ser confirmada por E. Hubble em 1924. Até então muitos pensavam que todo o universo era apenas nossa galáxia. A lei de Hubble para os desvios para o vermelho só apareceu em 1929. Esta relação entre G, R_o, c e ρ_o foi redescoberta por Sciama em 1953, por Brown em 1955, por Edwards em 1974, por Eby em 1977 e por nós mesmos em 1989: [Sci53], [Bro55] e [Bro82, pág. 57], [Edw74], [Eby77] e [Ass89a].

Schrödinger vai então um passo além. Ele toma a energia cinética como uma aproximação para baixas velocidades e supõe a energia cinética $mc^2(1/\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1)$ como uma relação empírica válida mesmo a altas velocidades. Para derivar esta energia ele modifica a energia potencial de onde havia partido pela expressão

$$U = -G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r}\left(3 - \frac{2}{(1 - \dot{r}^2/c^2)^{3/2}}\right) .$$

Esta expressão se reduz à de Weber se a expandimos somente até

segunda ordem em $\dot{r}/c$. Após integrá-la para as massas distantes Schrödinger obteve analogamente ao procedimento anterior uma expressão como a energia cinética relativística. Ele também observa que esta energia pode ser derivada de uma energia lagrangiana L dada por

$$L = G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}} - 4\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2} + 3\right) .$$

Após a integração usual, esta lagrangiana fornece uma expressão análoga à lagrangiana relativística de uma partícula pontual: $L = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}$. Mais uma vez, a massa que aparece na derivação de Schrödinger é a massa gravitacional do corpo e sua velocidade em relação ao referencial da matéria distante, isto é, em relação ao referencial no qual a matéria distante está em repouso. Um trabalho análogo ao de Schrödinger sobre uma energia relacional válida a altas velocidades, $\dot{r} \approx c$, foi feito recentemente por Wesley, que não tinha conhecimento do trabalho de Schrödinger, [Wes90].

Schrödinger não trabalhou mais ao longo destas linhas após este trabalho, nem tinha publicado nada antes sobre o assunto. Este foi um de seus últimos trabalhos antes dos artigos famosos sobre a mecânica quântica, onde desenvolveu a assim chamada equação de Schrödinger e o enfoque ondulatório para a mecânica quântica. O enorme sucesso destes artigos pode ser um dos motivos pelos quais ele não retornou ao seu trabalho sobre o princípio de Mach.

Um segundo motivo pode ter a ver com Reissner. Em seu artigo de 1925 Schrödinger afirma que chegou "heuristicamente" na expressão (11.9), que é essencialmente a energia potencial de Weber aplicada a gravitação. Ele não cita Weber, Tisserand, Reissner ou qualquer outro autor. Segundo o dicionário, heurístico significa o método analítico para o descobrimento de verdades científicas, ou seja, o método de resolver problemas por raciocínio indutivo, avaliando a experiência passada e descobrindo a solução por tentativa e erro. Isto é, Schrödinger haveria chegado a esta expressão sozinho. Citamos aqui sua justificativa sobre como chegou na expressão para implementar o princípio de Mach ([Sch25] e [XA94], nossa ênfase):

> Pode-se perguntar se talvez não fosse possível que a ener-

gia cinética, assim como a potencial, dependesse não apenas de uma partícula, mas da energia de interação das duas massas, e, assim sendo, da distância e velocidade relativa das duas partículas. De todas as expressões para essa energia, escolhemos **heuristicamente** a que satisfaz às seguintes exigências:

1. A energia cinética como energia de interação deve depender das massas e distâncias das partículas da mesma maneira que o potencial de Newton;

2. Deve ser proporcional ao quadrado da velocidade de variação da distância.

Para a energia de interação total de duas massas pontuais, μ e μ', à distância r, isso resulta na expressão

$$W = \gamma \frac{\mu\mu'\dot{r}^2}{r} - \frac{\mu\mu'}{r} \ .$$

As massas são aqui, dadas de tal forma que a constante gravitacional seja igual a 1. A constante indeterminada γ tem dimensão de recíproco de uma velocidade quadrática. Como ela deve ser universal, esperamos que se trate, a menos de um fator numérico, da velocidade da luz e veremos que ela pode ser reduzida a um fator numérico quando escolhemos o segundo-luz como unidade de tempo. Posteriormente, mostraremos que esse fator é igual a 3.

Acontece que a história não foi bem essa. Recentemente começaram a ser publicadas as obras completas de Schrödinger. Ao final da reimpressão deste artigo há uma nota datilografada, assinada por Schrödinger, onde ele pede profundas desculpas por ter plagiado inconscientemente a idéia de Reissner, [Sch84, pág. 192]. Ele afirma que definitivamente conhecia o primeiro artigo de Reissner, de 1914, mas não tem certeza sobre o segundo artigo. Ele chama os artigos de Reissner "muito interessantes" e espera que seu próprio artigo vá ser de algum interesse por apresentar um tratamento do assunto um pouco diferente. Pode ser que o fato de ele ter utilizado as idéias de

Reissner sem citá-lo e o constrangimento de ter de se corrigir mais tarde (outros podem ter percebido a similaridade entre os trabalhos de Reissner e de Schrödinger) tenham influído para que ele não mais tratasse deste assunto. De qualquer forma não deixa de ser uma ironia que embora nem Reissner nem Schrödinger tivessem citado Weber, a força e a energia de Weber já houvessem sido propostas uns 70 anos antes de Reissner (80 antes de Schrodinger). A aplicação delas à gravitação data de pelo menos a década de 1870, uns 40 anos antes de Reissner. Além de Weber ser alemão e de ter publicado nessa língua, assim como Reissner e Schrödinger, seu trabalho havia sido amplamente discutido por Maxwell e muitos outros. É incrível que nenhum dos dois tivesse conhecimento disto e que mesmo após suas publicações outros não tenham chamado a atenção deles para este fato.

Um terceiro motivo de Schrödinger não ter mais trabalhado com uma lei do tipo da de Weber para implementar o princípio de Mach pode ter sido o fato de que ele se converteu às teorias de Einstein da relatividade, assim como havia acontecido com Reissner. Por exemplo, Schrödinger trabalhou mais tarde com a teoria unificada baseado em trabalhos de Einstein ([Hit87]). Chegou até mesmo a publicar um livro sobre o universo em expansão, baseado na teoria da relatividade geral de Einstein, [Sch57].

Este artigo de 1925 de Schrödinger também não foi seguido ou desenvolvido por outras pessoas e ficou essencialmente esquecido nos 70 anos seguintes. De 1925 a 1993 só encontramos uma referência a ele num artigo de 1987: [Meh87]. Mesmo assim havia apenas uma simples menção relacionada com este artigo na pág. 1157. Uma outra citação breve se encontra no livro de Mehra, [MR87, págs. 372-373 e 459]. Foi apenas em 1993 que este artigo fundamental de Schrödinger começou a ser redescoberto por outras pessoas. Julian Barbour nos contou sobre este artigo em julho de 1993, tendo sido ele próprio informado sobre ele um pouco antes por Domenico Giulini, que o notou nas obras completas de Schrödinger (comunicação particular de Julian Barbour e [BP95, pág. 5]). Este artigo foi então discutido na conferência sobre o princípio de Mach que ocorreu em Tübbingen, na Alemanha, em 1993. Recentemente ele foi traduzido para o por-

tuguês, [XA94], e para o inglês, [Sch95]. Desde 1993 pode-se dizer que este artigo saiu do esquecimento.

Este artigo de Schrödinger é extremamente importante e a maioria dos resultados relevantes da mecânica relacional estão contidas nele. É impressionante que ele não tenha continuado ao longo deste enfoque e que outros não tenham percebido quão importante era este trabalho e quão longe iam suas conseqüências. Se este trabalho tivesse sido explorado em todas as suas conseqüências a mecânica relacional poderia ter sido aceita como uma teoria completamente desenvolvida 70 anos atrás.

Não temos conhecimento de qualquer teoria relacional tentando implementar o princípio de Mach nos cinqüenta anos seguintes ao trabalho de Schrödinger. Embora tenham havido alternativas para a relatividade geral, elas foram em geral modeladas com base no trabalho de Einstein e assim mantiveram a maior parte das características da teoria de Einstein (quantidades absolutas, inércia em relação ao espaço, forças dependentes do observador ou referencial etc.) Não vamos então considerá-las aqui. Uma exceção que deve ser mencionada são os trabalhos de Burniston Brown, [Bro55] e [Bro82]. Ele não seguiu a relatividade geral mas sim uma analogia com o eletromagnetismo. Infelizmente a expressão de força que empregou não é exatamente relacional como a de Weber. Apesar disto chegou em diversas conseqüências machianas com seu modelo.

Somente em 1974 Edwards foi levado a trabalhar com grandezas relacionais como $\dot{r}$ por analogias entre o eletromagnetismo e a gravitação: [Edw74]. Ele não estava ciente do trabalho de Schrödinger. Ele afirma que seu "enfoque emprega algumas das idéias básicas das teorias eletromagnéticas de Weber e Riemann." Ele chama atenção para uma explicação possível interessante para a origem das forças de ligação dentro das partículas fundamentais e dos núcleos utilizando o fato de que uma força de Weber aplicada ao eletromagnetismo depende da aceleração entre as cargas. Isto significa que a massa inercial efetiva de uma partícula carregada vai depender de sua energia potencial eletrostática, de forma que esta massa inercial efetiva pode se tornar negativa sob certas condições. Como conseqüência disto, cargas negativas poderiam se atrair quando estas condições fossem

satisfeitas. Como já vimos, Helmholtz tinha chegado nestas idéias de massas efetivas dependentes da energia potencial 100 anos antes, [Ass94]. Edwards não publicou mais ao longo desta linha de pesquisa de implementar o princípio de Mach a partir de uma força de Weber aplicada para a gravitação.

Ao mesmo tempo Barbour, e depois Barbour e Bertotti, trabalhavam com grandezas relacionais, derivadas intrínsecas e com a configuração espacial relativa do universo: [Bar74], [BB77] e [BB82]. Hoje em dia eles seguem mais o enfoque einsteiniano.

Eby seguiu as idéias de Barbour e trabalhou com uma energia lagrangiana como a Eq. (11.8), [Eby77]. Ele calculou a precessão do periélio dos planetas com sua lagrangiana e também implementou o princípio de Mach. Mais uma vez ele não estava ciente da eletrodinâmica de Weber nem do artigo de Schrödinger. Num artigo seguinte Eby considerou a precessão de um giroscópio com seu modelo e mostrou que há previsões diferentes entre a mecânica relacional e a teoria da relatividade de Einstein nas precessões geodéticas e do movimento, [Eby79]. Não temos conhecimento de nenhuma experiência que tenha sido realizada para testar estas previsões. Eby não publicou mais ao longo destas idéias e seu trabalho também não foi seguido por outros pesquisadores.

Nosso trabalho sobre a mecânica relacional se desenvolveu durante 1988 e foi publicado em diversos lugares: [Ass89a], [Ass92f], [Ass92c], [Ass93b], [Ass93c], [Ass94, Seções 7.5 a 7.7], [AG95], [Ass95f], [Ass95d] e [AG96]. Não tivemos conhecimento do artigo de Schrödinger até 1993. De acordo com nosso conhecimento da literatura até o momento, fomos os primeiros a obter as Eqs. (8.8) e (8.12), [Ass89a], isto é, a implementar quantitativamente a idéia de Mach de que um universo distante girando gera forças centrífuga e de Coriolis reais. Fomos também os primeiros a derivar a Eq. (8.7) com $\vec{\omega} \neq 0$. Helmholtz e Schrödinger obtiveram este resultado anteriormente quando $\vec{\omega} = 0$. Fomos também os primeiros a derivar as Eqs. (8.9) e (8.10), ver [Ass89a], [Ass92f], [Ass94], Cap. 7; e a introduzir o decaimento exponencial na energia potencial de Weber, Eqs. (8.5) e (8.6), [Ass92f].

No que diz respeito ao princípio de equilíbrio dinâmico (terceiro postulado da mecânica relacional, Seção 8.1), Sciama parece ter sido

o primeiro a supor uma forma particular deste princípio, [Sci53]. A primeira limitação de sua formulação de que a soma de todas as forças sobre qualquer corpo é nula foi que ele a supôs válida apenas para interações gravitacionais, enquanto que nós a aplicamos para todos os tipos de interação. Mas muito mais sério do que isto foi o fato de que ele restringiu a validade de seu postulado apenas ao referencial de repouso do corpo de prova que sente a interação, enquanto que nós supomos este princípio válido em todos os sistemas de referência. O motivo para sua suposição limitada é muito simples. Ele utilizou como sua lei de força uma expressão similar à força de Lorentz aplicada para a gravitação, força esta que certamente não é relacional. Além do mais, como é bem conhecido, a força de Lorentz depende da posição e velocidade do corpo de prova, mas não de sua aceleração. Quando o corpo de prova era acelerado em relação às galáxias distantes, Sciama era capaz de derivar no referencial do corpo de prova (isto é, num referencial sempre fixo ao corpo de prova) que as galáxias distantes exerceriam uma força sobre o corpo de prova com massa gravitacional m_g dada por $m_g\vec{a}_{Um}$, onde $\vec{a}_{Um}$ é a aceleração do conjunto de galáxias distantes em relação ao corpo de prova. Mas no referencial das galáxias distantes não há força exercida por elas sobre o corpo de prova acelerado, se utilizamos a expressão de Sciama! Isto é, se estamos no referencial universal (fixo em relação ao conjunto de galáxias distantes) e calculamos a força gravitacional exercida por estas galáxias sobre um corpo de prova que está acelerado em relação a elas, obtemos um resultado nulo com a força gravitacional de Sciama (análoga à força de Lorentz eletromagnética), não interessando a aceleração do corpo de prova em relação às galáxias. Isto é devido ao fato de que a força de Lorentz não é relacional, fornecendo resultados diferentes em diferentes sistemas de referência. Isto também é devido ao fato de que ela depende da aceleração do corpo fonte (que gera os campos ou as forças), mas não da aceleração do corpo de prova, ver [Ass92a], [Ass93a], [Ass94, Seções 6.4 e 7.3]. Isto significa que ele não pôde implementar o princípio de Mach em toda sua generalidade. Em primeiro lugar, ele não trabalhou com grandezas relacionais. Ele também não conseguiu derivar a segunda lei de Newton no referencial das galáxias distantes, onde se sabe que ela é

válida. A primeira apresentação do princípio de equilíbrio dinâmico em toda sua generalidade, onde também se derivaram todas as suas conseqüências importantes, ocorreu apenas em nosso artigo de 1989, [Ass89a].

Esperamos que daqui por diante muitas outras pessoas se envolverão com a mecânica relacional, desenvolvendo suas propriedades e conseqüências. Foi por este motivo que este livro foi escrito, de tal forma que outros possam participar na história deste assunto fascinante.

Capítulo 12

Conclusão

Acreditamos fortemente na mecânica relacional como apresentada neste livro. Escrevemos esta obra para mostrar ao leitor esta formulação em toda sua generalidade, de tal forma que outros possam ver toda a força deste novo enfoque.

Peter Graneau é um dos que captou todos os aspectos essenciais da mecânica relacional: [Gra90d], [Gra90a], [Gra90c], [Gra90e], [Gra90b] e [GG93], Cap. 3, The Riddle of Inertia. Outros que podemos mencionar são Wesley, [Wes90] e [Wes91], Cap. 6; Zylbersztajn, [Zyl94]; e Phipps, [Phi96].

Acreditamos que as intuições subjacentes aos três postulados da mecânica relacional são bastante claras e plausíveis. Por outro lado, descobertas experimentais podem nos obrigar a alterar a lei de Weber aplicada ao eletromagnetismo ou à gravitação. Por exemplo, pode ser que seja necessário introduzir termos que dependem de d^3r_{12}/dt^3, d^4r_{12}/dt^4, etc. Potências maiores do que 2 elevando cada derivada temporal podem também ser necessárias, como $(\dot{r})^3$, $(\dot{r})^4$, ..., $(\ddot{r})^2$, $(\ddot{r})^3$, ..., $(d^3r/dt^3)^m$, ... A necessidade ou não do decaimento exponencial na gravitação (o mesmo valendo para o eletromagnetismo) precisa ser confirmada experimentalmente. Mas as principais linhas sobre como abordar os problemas futuros já foram estabelecidas: Não ter espaço e tempo absolutos; só devem aparecer grandezas relacionais; todas as forças devem vir de interações entre corpos materiais; para partículas pontuais as forças devem estar direcionadas ao longo da reta as unindo e devem obedecer ao princípio de ação e reação; etc.

Isaac Newton criou a melhor mecânica possível em seu tempo. Ele entendeu claramente a diferença conceitual entre inércia e peso (ou entre massa gravitacional e inercial). Conhecia o resultado de Galileo da igualdade da aceleração em queda livre e realizou uma experiência extremamente precisa com pêndulos, que mostrou que a inércia de um corpo é proporcional ao seu peso com uma precisão de uma parte

em mil. Embora não pudesse explicar esta proporcionalidade, ele foi um gigante ao perceber o significado e a importância deste fato e ao realizar uma experiência tão precisa. Introduziu a lei de gravitação universal que cai com o inverso do quadrado da distância e provou dois teoremas capitais: uma casca esférica atrai uma partícula material externa como se toda a casca estivesse concentrada em seu centro e não exerce nenhuma força sobre uma partícula interna, qualquer que seja sua posição (ambos os teoremas sendo válidos quaisquer que fossem o estado de movimento da partícula teste ou a rotação da casca). Realizou a experiência fundamental do balde e observou que a concavidade da água não era devido a sua rotação relativa em relação ao balde. Devido aos seus dois teoremas mencionados acima ele acreditava que esta concavidade da água não podia ser devido a sua rotação em relação à Terra ou em relação às estrelas fixas. Ele não tinha outra alternativa para explicar esta experiência a não ser dizer que ela provava a existência de um espaço absoluto desvinculado da matéria.

Foi apenas 160 anos depois que Wilhelm Weber propôs uma força elétrica dependendo da distância entre as cargas, da velocidade radial relativa e da aceleração radial relativa entre elas. Ele propôs também uma energia potencial dependendo da distância e da velocidade entre as cargas. Foi a primeira expressão de força a depender da aceleração entre os corpos e a primeira expressão de energia a depender da velocidade entre eles. A formulação de Weber é a única eletrodinâmica já proposta até hoje contendo apenas grandezas relacionais entre as cargas que estão interagindo. Por este motivo tanto a força quanto a energia entre as cargas nesta formulação têm o mesmo valor para todos os observadores ou referenciais, mesmo para referenciais não inerciais no sentido newtoniano. A força de Weber satisfaz ao princípio de ação e reação e está direcionada ao longo da linha reta unindo as cargas. Ela satisfaz aos princípios de conservação do momento linear, do momento angular e da energia. Quando não há movimento entre as cargas deriva-se com ela a força de Coulomb e a lei de Gauss da eletrostática. Com a força de Weber deriva-se a força de Ampère entre elementos de corrente. Desta última expressão pode-se derivar a lei de não existência de monopólos magnéticos e a

lei circuital magnética. Weber conseguiu derivar também de sua expressão de força a lei de indução de Faraday. Weber e Kirchhoff conseguiram derivar uma equação de onda descrevendo a propagação de perturbações eletromagnéticas caminhando com a velocidade da luz antes de Maxwell. Fizeram isto trabalhando independentemente um do outro, mas ambos baseados na eletrodinâmica de Weber. Weber foi também o primeiro a medir a grandeza eletromagnética $1/\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}$ encontrando o mesmo valor que a velocidade da luz no vácuo. Este foi o primeiro indício quantitativo mostrando uma ligação entre a óptica e o eletromagnetismo. Para uma discussão detalhada de todos estes pontos ver: [Ass94] e [Ass95b].

Utilizando-se uma energia potencial de Weber para a gravitação e aplicando-a para a interação entre um corpo de teste e o universo distante obtém-se uma expressão análoga à energia cinética clássica. Identificando as duas expressões obtém-se que a energia cinética passa a ser vista como mais uma energia de interação, assim como todas as outras. Neste caso, como uma energia de interação gravitacional entre o corpo de teste e o universo distante quando há movimento translacional entre ambos. Uma força de Weber aplicada para a gravitação mostrou que o universo distante exerce uma força gravitacional sobre os corpos acelerados em relação a ele. Esta força é proporcional à massa gravitacional do corpo de teste e a sua aceleração em relação ao universo distante. Juntando-se estes resultados com o princípio de equilíbrio dinâmico pôde-se derivar leis de movimento similares à primeira e segunda leis de Newton. Isto finalmente explicou a proporcionalidade entre a inércia e o peso. Também derivou-se o fato de que o melhor sistema inercial de que dispomos é aquele das galáxias distantes. Ou seja, foi explicada a coincidência da mecânica newtoniana de que o universo distante não gira em relação ao espaço absoluto ou em relação a um referencial inercial. Derivou-se uma relação ligando grandezas microscópicas (G) com macroscópicas (H_o e ρ_o). Já se sabia que esta relação era verdadeira, mas sem uma explicação convincente de sua origem. Obteve-se uma equivalência completa entre os sistemas ptolomaico e copernicano. Ou seja, a cinemática passou a ser equivalente à dinâmica. Passou então a ser igualmente válido afirmar que a Terra está em movimento em relação ao universo dis-

tante, como afirmar que a Terra está em repouso e que é o universo distante que se move em relação a ela. Foi também derivado o fato de que todas as forças inerciais da mecânica newtoniana, como a força centrífuga e a de Coriolis, são forças reais agindo entre o corpo de teste e o universo distante. Estas forças são de origem gravitacional, surgindo quando há uma rotação entre eles. Isto também explicou a concavidade na superfície da água na experiência do balde de Newton como sendo devido à rotação da água em relação ao universo distante, como havia sugerido Mach.

Agora que obtivemos esta compreensão clara e satisfatória dos fatos fundamentais da mecânica newtoniana, a melhor coisa a fazer em nossa opinião é ir em frente seguindo este enfoque relacional.

Vamos entrar num novo mundo!

Referências Bibliográficas

References

[AB95] A. K. T. Assis and M. A. Bueno. Longitudinal forces in Weber's electrodynamics. *International Journal of Modern Physics B*, 9:3689–3696, 1995.

[AB96] A. K. T. Assis and Marcelo A. Bueno. Equivalence between Ampère and Grassmann's forces. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32:431–436, 1996.

[Abr89] P. C. C. Abrantes. Newton e a física francesa no século XIX. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 1, Série 2:5–31, 1989.

[AC91] A. K. T. Assis and J. J. Caluzi. A limitation of Weber's law. *Physics Letters A*, 160:25–30, 1991.

[AC92] A. K. T. Assis and R. A. Clemente. The ultimate speed implied by theories of Weber's type. *International Journal of Theoretical Physics*, 31:1063–1073, 1992.

[AC93] A. K. T. Assis and R. A. Clemente. The influence of temperature on gravitation. *Il Nuovo Cimento B*, 108:713–716, 1993.

[AG95] A. K. T. Assis and P. Graneau. The reality of Newtonian forces of inertia. *Hadronic Journal*, 18:271–289, 1995.

[AG96] A. K. T. Assis and P. Graneau. Nonlocal forces of inertia in cosmology. *Foundations of Physics*, 26:271–283, 1996.

[AH48] R. A. Alpher and R. Herman. Evolution of the universe. *Nature*, 162:774–775, 1948.

[AH49] R. A. Alpher and R. Herman. Remarks on the evolution of the expanding universe. *Physical Review*, 75:1089–1095, 1949.

[Ale84] H. G. Alexander (ed.). *The Leibniz-Clarke Correspondence.* Manchester University Press, Manchester, 1984.

[Amp58] A. M. Ampère. *Théorie Mathématique des Phénomenes Électrodynamiques Uniquement Déduite de l'Expérience.* Blanchard, Paris, 1958.

[AN95a] A. K. T. Assis and M. C. D. Neves. History of the 2.7 K temperature prior to Penzias and Wilson. *Apeiron*, 2:79–84, 1995.

[AN95b] A. K. T. Assis and M. C. D. Neves. The redshift revisited. *Astrophysics and Space Science*, 227:13–24, 1995. This paper was also published in *Plasma Astrophysics and Cosmology*, A. L. Peratt (ed.), (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995), pp. 13-24.

[AP92] A. K. T. Assis and F. M. Peixoto. On the velocity in the Lorentz force law. *The Physics Teacher*, 30:480–483, 1992.

[Arc89] T. Archibald. Energy and the mathematization of electrodynamics in Germany, 1845–1875. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 39:276–308, 1989.

[Ass89a] A. K. T. Assis. On Mach's principle. *Foundations of Physics Letters*, 2:301–318, 1989.

[Ass89b] A. K. T. Assis. Weber's law and mass variation. *Physics Letters A*, 136:277–280, 1989.

[Ass90a] A. K. T. Assis. Deriving Ampère's law from Weber's law. *Hadronic Journal*, 13:441–451, 1990.

[Ass90b] A. K. T. Assis. Modern experiments related to Weber's electrodynamics. In U. Bartocci and J. P. Wesley, editors, *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics*, pages 8–22, Blumberg, Germany, 1990. Benjamin Wesley Publisher.

[Ass91a] A. K. T. Assis. Can a steady current generate an electric field? *Physics Essays*, 4:109–114, 1991.

[Ass91b] A. K. T. Assis. Wilhelm Eduard Weber (1804–1891) — Sua vida e sua obra. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 5:53–59, 1991.

[Ass92a] A. K. T. Assis. Centrifugal electrical force. *Communications in Theoretical Physics*, 18:475–478, 1992.

[Ass92b] A. K. T. Assis. *Curso de Eletrodinâmica de Weber*. Setor de Publicações do Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas — Unicamp, Campinas, 1992. Notas de Física IFGW Número 5.

[Ass92c] A. K. T. Assis. Deriving gravitation from electromagnetism. *Canadian Journal of Physics*, 70:330–340, 1992.

[Ass92d] A. K. T. Assis. On forces that depend on the acceleration of the test body. *Physics Essays*, 5:328–330, 1992.

[Ass92e] A. K. T. Assis. On Hubble's law of redshift, Olbers' paradox and the cosmic background radiation. *Apeiron*, 12:10–16, 1992.

[Ass92f] A. K. T. Assis. On the absorption of gravity. *Apeiron*, 13:3–11, 1992.

[Ass92g] A. K. T. Assis. On the mechanism of railguns. *Galilean Electrodynamics*, 3:93–95, 1992.

[Ass92h] A. K. T. Assis. Teorias de ação a distância — uma tradução comentada de um texto de James Clerk Maxwell. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 7:53–76, 1992.

[Ass93a] A. K. T. Assis. Changing the inertial mass of a charged particle. *Journal of the Physical Society of Japan*, 62:1418–1422, 1993.

[Ass93b] A. K. T. Assis. Compliance of a Weber's force law for gravitation with Mach's principle. In P. N. Kropotkin et al., editor, *Space and Time Problems in Modern Natural Science, Part II*, pages 263–270, St.-Petersburg, 1993. Tomsk

Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. Series: "The Universe Investigation Problems," Issue 16.

[Ass93c] A. K. T. Assis. A steady-state cosmology. In H. C. Arp, C. R. Keys, and K. Rudnicki, editors, *Progress in New Cosmologies: Beyond the Big Bang*, pages 153–167, New York, 1993. Plenum Press.

[Ass94] A. K. T. Assis. *Weber's Electrodynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[Ass95a] A. K. T. Assis. Acceleration dependent forces: reply to Smulsky. *Apeiron*, 2:25, 1995.

[Ass95b] A. K. T. Assis. *Eletrodinâmica de Weber - Teoria, Aplicações e Exercícios*. Editora da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 1995.

[Ass95c] A. K. T. Assis. A eletrodinâmica de Weber e seus desenvolvimentos recentes. *Ciência e Natura*, 17, 1995. Aceito para publicação.

[Ass95d] A. K. T. Assis. Gravitation as a fourth order electromagnetic effect. In T. W. Barrett and D. M. Grimes, editors, *Advanced Electromagnetism: Foundations, Theory and Applications*, pages 314–331, Singapore, 1995. World Scientific.

[Ass95e] A. K. T. Assis. Weber's force versus Lorentz's force. *Physics Essays*, 8:335–341, 1995.

[Ass95f] A. K. T. Assis. Weber's law and Mach's principle. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle - From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 159–171, Boston, 1995. Birkhäuser.

[AT94] A. K. T. Assis and D. S. Thober. Unipolar induction and Weber's electrodynamics. In M. Barone and F. Selleri, editors, *Frontiers of Fundamental Physics*, pages 409–414, New York, 1994. Plenum Press.

[BA95] Marcelo A. Bueno and A. K. T. Assis. A new method for inductance calculations. *Journal of Physics D*, 28:1802–1806, 1995.

[Bar74] J. B. Barbour. Relative-distance Machian theories. *Nature*, 249:328–329, 1974. Misprints corrected in Nature, vol. 250, p. 606 (1974).

[Bar89] J. B. Barbour. *Absolute or Relative Motion? — A study from a Machian point of view of the discovery and the structure of dynamical theories*, volume 1: *The Discovery of Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Bar93] E. S. de O. Barra. Newton sobre movimento, espaço e tempo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 3(1/2), Série 3:85–115, 1993.

[BB77] J. B. Barbour and B. Bertotti. Gravity and inertia in a Machian framework. *Nuovo Cimento B*, 38:1–27, 1977.

[BB82] J. B. Barbour and B. Bertotti. Mach's principle and the structure of dynamical theories. *Proceedings of the Physical Society of London A*, 382:295–306, 1982.

[BC66] D. R. Brill and J. M. Cohen. Rotating masses and their effect on inertial frames. *Physical Review*, 143:1011–1015, 1966.

[Ber80] G. Berkeley. Tratado sobre os Princípios do Conhecimento Humano. In Victor Civita, editor, Volume "Berkeley e Hume" da Coleção *Os Pensadores*, pages 1–44, São Paulo, 2^a edição, 1980. Abril Cultural. Tradução de A. Sérgio.

[Ber92] G. Berkeley. De Motu - Of Motion, or the principle and nature of motion and the cause of the communication of motions. In M. R. Ayers, editor, *George Berkeley's Philosophical Works*, pages 211–227, London, 1992. Everyman's Library.

[Bla72] J. T. Blackmore. *Ernst Mach - His Life, Work, and Influence.* University of California Press, Berkeley, 1972.

[Bla89] J. Blackmore. Ernst Mach leaves 'the church of physics'. *British Journal for the Philosophy of Science*, 40:519–540, 1989.

[Bor53] M. Born. Theoretische bemerkungen zu Freundlich's formel für die stellare rotverschiebung. In *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen Mathematisch-Physikalische Klasse, N. 7*, pages 102–108, Göttingen, 1953. Vandenhoeck & Ruprecht.

[Bor54] M. Born. On the interpretation of Freundlich's red-shift formula. *Proceedings of the Physical Society A*, 67:193–194, 1954.

[Bor65] M. Born. *Einstein's Theory of Relativity.* Dover, New York, Revised edition, 1965.

[Bor88] G. Borner. *The Early Universe — Facts and Fiction.* Springer, Berlin, 1988.

[BP55] L. Bass and F. A. E. Pirani. On the gravitational effects of distant rotating masses. *Philosophical Magazine*, 46:850–856, 1955.

[BP95] J. B. Barbour and H. Pfister (editors). *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity.* Birkhäuser, Boston, 1995.

[Bra29] J. Bradley. The discovery of the aberration of light. In H. Shapley and H. E. Howarth, editors, *A Source Book in Astronomy*, pages 103–108, New York, 1929. McGraw-Hill.

[Bra35] J. Bradley. The velocity of light. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 337–340, New York, 1935. McGraw-Hill.

[Bra62a] C. H. Brans. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. II. *Physical Review*, 125:2194–2201, 1962.

[Bra62b] C. H. Brans. Mach's principle and the locally gravitational constant in general relativity. *Physical Review*, 125:388–396, 1962.

[Bro55] G. B. Brown. A theory of action-at-a-distance. *Proceedings of the Physical Society B*, 68:672–678, 1955.

[Bro82] G. B. Brown. *Retarded Action-at-a-Distance.* Cortney Publications, Luton, 1982.

[Bun66] M. Bunge. Mach's critique of newtonian mechanics. *American Journal of Physics*, 34:585–596, 1966.

[BX89] J. B. Bastos Filho and R. M. Xavier. Conflitos entre os Principia de Newton e os Principia de Descartes. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 1, Série 2:65–76, 1989.

[CA91] R. A. Clemente and A. K. T. Assis. Two-body problem for Weber-like interactions. *International Journal of Theoretical Physics*, 30:537–545, 1991.

[CA95a] J. J. Caluzi and A. K. T. Assis. An analysis of Phipps's potential energy. *Journal of the Franklin Institute B*, 332:747–753, 1995.

[CA95b] J. J. Caluzi and A. K. T. Assis. Schrödinger's potential energy and Weber's electrodynamics. *General Relativity and Gravitation*, 27:429–437, 1995.

[Cav98] H. Cavendish. Experiments to determine the density of the earth. *Philosophical Transactions*, 88:469–526, 1798. Reprinted in: *The Scientific Papers of the Honorable Henry Cavendish, F. R. S.*, vol. II, E. Thorpe et al. (editors), (Cambridge University Press, Cambridge, 1928), pp. 249-286; also reprinted with explanatory notes by A. S. Mackenzie in: *Gravitation, Heat and X-Rays*, (Arno Press, New York, 1981), pp. 57-105.

[CB68] J. M. Cohen and D. R. Brill. Further examples of "machian" effects of rotating bodies in general relativity. *Nuovo Cimento B*, 56:209–219, 1968.

[Clo87] B. E. Clotferter. The Cavendish experiment as Cavendish knew it. *American Journal of Physics*, 55:210–213, 1987.

[Coh40] I. B. Cohen. Roemer and the first determination of the velocity of light. *Isis*, 31:327–379, 1940.

[Coh78] I. B. Cohen (ed.). *Isaac Newton's Papers & Letters on Natural Philosophy*. Harvard University Press, Cambridge, second edition, 1978.

[Coh80] I. B. Cohen. *The Newtonian Revolution*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[Coh81] I. B. Cohen. Newton's discovery of gravity. *Scientific American*, 244:122–133, 1981.

[Cou35a] A. Coulomb. First memoir on electricity and magnetism. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 408–413, New York, 1935. McGraw-Hill.

[Cou35b] A. Coulomb. Second memoir on electricity and magnetism. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 413–420, New York, 1935. McGraw-Hill.

[CR78] P. Caldirola and E. Recami. The concept of time in physics. *Epistemologia*, 1:263–304, 1978.

[CR82] C. A. P. Ceneviva and W. A. Rodrigues Jr. Objetividade, convencionalismo e a teoria da relatividade. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 3:59–83, 1982.

[Cra90] R. Crane. The Foucault pendulum as a murder weapon and a physicist's delight. *The Physics Teacher*, 28:264–269, 1990.

[CS58] G. Cocconi and E. Salpeter. A search for anisotropy of inertia. *Nuovo Cimento*, 10:646–651, 1958.

[CS60] G. Cocconi and E. Salpeter. Upper limit for the anisotropy of inertia from the Mössbauer effect. *Physical Review Letters*, 4:176–177, 1960.

[Dar20] C. G. Darwin. The dynamical motions of charged particles. *Philosophical Magazine*, 39:537–551, 1920.

[dB66] L. de Broglie. Sur le déplacement des raies émises par un objet astronomique lointain. *Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de Paris*, 263:589–592, 1966.

[Dic61] R. H. Dicke. Experimental tests of Mach's principle. *Physical Review Letters*, 7:359, 1961. Reprinted in: R. H. Dicke, *The Theoretical Significance of Experimental Relativity*, (Gordon and Breach, New York, 1964), pp. 31-34.

[Dir38] P. A. M. Dirac. A new basis for cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 165:199–208, 1938.

[Dre61] R. W. P. Drever. A search for anisotropy of inertial mass using a free precession technique. *Philosophical Magazine*, 6:683–687, 1961.

[Eby77] P. B. Eby. On the perihelion precession as a Machian effect. *Lettere al Nuovo Cimento*, 18:93–96, 1977.

[Eby79] P. Eby. Gyro precession and Mach's principle. *General Relativity and Gravitation*, 11:111–117, 1979.

[Edd88] A. S. Eddington. *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reprint of 1926 edition.

[Edw74] W. F. Edwards. Inertia and an alternative approach to the theory of interactions. *Proceedings of the Utah Academy of Science, Arts, and Letters*, 51, Part 2:1–7, 1974.

[Ein58] A. Einstein. *O Significado da Relatividade*. Arménio Armado, Coimbra, 1958. Tradução de M. Silva.

[Ein78a] A. Einstein. Considerações cosmológicas sobre a teoria da relatividade geral. In A. Einstein, H. Lorentz, H. Weyl e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade*, pages 225–241, Lisboa, 2^a edição, 1978. Fundação Calouste Gulbenkian.

[Ein78b] A. Einstein. Os fundamentos da teoria da relatividade geral. In A. Einstein, H. Lorentz, H. Weyl e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade*, pages 141–214, Lisboa, 2^a edição, 1978. Fundação Calouste Gulbenkian.

[Ein78c] A. Einstein. Sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento. In A. Einstein, H. Lorentz, H. Weyl e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade*, pages 47–86, Lisboa, 2^a edição, 1978. Fundação Calouste Gulbenkian.

[Ein82] A. Einstein. *Notas Autobiográficas.* Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 3^a edição, 1982. Tradução de A. S. Rodrigues.

[Erl67] H. Erlichson. The Leibniz-Clarke controversy: absolute versus relative space and time. *American Journal of Physics*, 35:89–98, 1967.

[Evo88] F. R. R. Evora. *A Revolução Copernicana-Galileana*, volume I: Astronomia e Cosmologia Pré-Galileana. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas, 1988. Coleção CLE.

[Evo94] F. R. R. Evora. *A Revolução Copernicano-Galileana*, volume II: A Revolução Galileana. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas, 1994. Coleção CLE.

[Far52] M. Faraday. *Experimental Researches in Electricity*, volume 45, pp. 257–866 of *Great Books of the Western World.* Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952.

[FF96] B. Friedlander and I. Friedlander. *Absolute oder Relative Bewegung?* Leonhard Simion, Berlin, 1896.

[FF53] E. Finlay-Freundlich. Über die rotverschiebung der spektrallinien. In *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen Mathematisch-Physikalische Klasse, N. 7*, pages 95–102, Göttingen, 1953. Vandenhoeck & Ruprecht.

[FF54a] E. Finlay-Freundlich. Red-shifts in the spectra of celestial bodies. *Proceedings of the Physical Society A*, 67:192–193, 1954.

[FF54b] E. Finlay-Freundlich. Red shifts in the spectra of celestial bodies. *Philosophical Magazine*, 45:303–319, 1954.

[FF95] B. Friedlaender and I. Friedlaender. Absolute or relative motion? In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle, From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 114–119 and 309–311, Boston, 1995. Birkhäuser.

[Fou51a] L. Foucault. Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule. *Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de Paris*, Feb. 03:135–138, 1851.

[Fou51b] L. Foucault. Physical demonstration of the rotation of the earth by means of the pendulum. *Journal of the Franklin Institute*, 21:350–353, 1851.

[Fre89] S. French. A estrutura do argumento de Newton para a lei da gravitação universal. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 1, Série 2:33–52, 1989.

[GA94] P. Graneau and A. K. T. Assis. Kirchhoff on the motion of electricity in conductors. *Apeiron*, 19:19–25, 1994.

[Gam61] G. Gamow. *The Creation of the Universe.* Viking Press, New York, revised edition, 1961.

[Gen88] P. Gen. New insight into Olbers' and Seeliger's paradoxes and the cosmic background radiation. *Chinese Astronomy and Astrophysics*, 12:191–196, 1988.

[Ger98] P. Gerber. Die räumliche und zeitliche ausbreitung der gravitation. *Zeitschrift fur Mathematik und Physik II*, 43:93–104, 1898.

[Ger17] P. Gerber. Die fortpflanzungsgeschwindigkeit der gravitation. *Annalen der Physik*, 52:415–444, 1917.

[GG93] P. Graneau and N. Graneau. *Newton Versus Einstein — How Matter Interacts with Matter.* Carlton Press, New York, 1993.

[Ghi91] M. Ghins. *A Inércia e o Espaço-Tempo Absoluto.* Coleção CLE. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas, 1991.

[Ghi92] M. Ghins. A equivalência dinâmica segundo Mach e a teoria geral da relatividade. In F. R. R. Évora, editor, *Século XIX: O Nascimento da Ciência Contemporânea*, pages 161–175. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas, 1992.

[Ghi95] M. Ghins. A existência do espaço-tempo segundo Leonhard Euler. In F. R. R. Évora, editor, *Espaço e Tempo*, pages 41–51. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, Campinas, 1995.

[Gho84] A. Ghosh. Velocity dependent inertial induction: An extension of Mach's principle. *Pramana Journal of Physics*, 23:L671–L674, 1984.

[Gho86] A. Ghosh. Velocity-dependent inertial induction and secular retardation of the earth's rotation. *Pramana Journal of Physics*, 26:1–8, 1986.

[Gho93] A. Ghosh. Astrophysical and cosmological consequences of velocity-dependent inertial induction. In H. Arp, R. Keys, and K. Rudnicki, editors, *Progress in New Cosmologies: Beyond the Big Bang*, pages 305–326, New York, 1993. Plenum Press.

[Gol68] J. Goldemberg. *Física Geral e Experimental*, volume 1. Companhia Editora Nacional e Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1968.

[Gra85] P. Graneau. *Ampere-Neumann Electrodynamics of Metals.* Hadronic Press, Nonantum, 1985.

[Gra90a] P. Graneau. Far-action versus contact action. *Speculations in Science and Technology*, 13:191–201, 1990.

[Gra90b] P. Graneau. Has the mistery of inertia been solved? In U. Bartocci and J. P. Wesley, editors, *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics*, pages 129–136, Blumberg, Germany, 1990. Benjamin Wesley Publisher.

[Gra90c] P. Graneau. Interconnecting action-at-a-distance. *Physics Essays*, 3:340–343, 1990.

[Gra90d] P. Graneau. The riddle of inertia. *Electronics and Wireless World*, 96:60–62, 1990.

[Gra90e] P. Graneau. Some cosmological consequences of Mach's principle. *Hadronic Journal Supplement*, 5:335–349, 1990.

[Gui96] C. E. Guilhaume. La température de l'espace. *La Nature*, 24, series 2:210–211, 234, 1896.

[Har86] E. Harrison. Newton and the infinite universe. *Physics Today*, 39:24–32, 1986.

[Hay95] H. C. Hayden. Special relativity: problems and alternatives. *Physics Essays*, 8:366–374, 1995.

[Hea89] O. Heaviside. On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric. *Philosophical Magazine*, 27:324–339, 1889.

[Hee92] P. Heering. On Coulomb's inverse square law. *American Journal of Physics*, 60:988–994, 1992.

[Hel72] H. von Helmholtz. On the theory of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 44:530–537, 1872.

[Her41] G. Herzberg. *Molecular Spectra and Molecular Structure*, volume 1: Spectra of Diatomic Molecules. 1941.

[Hit87] O. Hittmair. Schrödinger's unified theory seen 40 years later. In C. W. Kilmister, editor, *Schrödinger - Centenary Celebration of a Polymath*, pages 165–175. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[Hof95] W. Hofmann. Motion and inertia. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle, From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 128–133, Boston, 1995. Birkhäuser.

[Hub37] E. Hubble. *The Observational Approach to Cosmology.* Clarendon Press, Oxford, 1937.

[Hub42] E. Hubble. The problem of the expanding universe. *American Scientist*, 30:99–115, 1942.

[Hub58] E. Hubble. *The Realm of the Nebulae.* Dover, New York, 1958.

[Hug60] V. W. Hughes et al. Upper limit for the anisotropy of inertial mass from nuclear resonance experiments. *Physical Review Letters*, 4:342–344, 1960.

[Jaa91] T. Jaakkola. Electro-gravitational coupling: Empirical and theoretical arguments. *Apeiron*, 9-10:76–90, 1991.

[Jac75] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics.* John Wiley, New York, second edition, 1975.

[Jak90] S. L. Jaki. *Cosmos in Transition — Studies in the History of Cosmology.* Pachart Publishing House, Tucson, 1990.

[Jam69] M. Jammer. *Concepts of Space - The History of Theories of Space in Physics.* Harvard University Press, Cambridge, 2nd edition, 1969.

[Kae58] F. A. Kaempffer. On possible realizations of Mach's program. *Canadian Journal of Physics*, 36:151–159, 1958.

[Koy86] A. Koyré. *Do Mundo Fechado ao Universo Infinito*. Forense-Universitária, Rio de Janeiro, 2^a edição, 1986. Tradução de D. M. Garschagen.

[Kuh57] T. S. Kuhn. *The Copernican Revolution*. Harvard University Press, Cambridge, 1957.

[Kuh82] T. S. Kuhn. *A Estrutura das Revoluções Científicas*, volume 115 of *Coleção Debates*. Editora Perspectiva, São Paulo, 1982.

[LaV86] P. A. LaViolette. Is the universe really expanding? *Astrophysical Journal*, 301:544–553, 1986.

[Lei83] G. W. Leibniz. *Correspondência com Clarke*. Coleção "Os Pensadores", volume de "Newton e Leibniz". Abril Cultural, São Paulo, 1983. Tradução e notas de C. L. de Mattos.

[Lei89] G. W. Leibniz. *Philosophical Essays*. Hackett Publishing Company, Indianapolis, 1989. Edited and translated by R. Ariew and D. Garber.

[Lor15] H. A. Lorentz. *The Theory of Electrons*. Teubner, Leipzig, second edition, 1915. Reprinted in *Selected Works of H. A. Lorentz*, vol. 5, N. J. Nersessian (Ed.), (Palm Publications, Nieuwerkerk, 1987).

[Lor31] H. A. Lorentz. *Lectures on Theoretical Physics*, volume 3. MacMilan, London, 1931.

[Lor78] H. A. Lorentz. A experiência interferencial de Michelson. In A. Einstein, H. Lorentz, H. Weyl e H. Minkowski*, O Princípio da Relatividade*, pages 5–11, Lisboa, 2^a edição, 1978. Fundação Calouste Gulbenkian.

[Luc79] P. Lucie. *Física Básica - Mecânica 1*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 1979.

[LV86] P. Lubin and T. Villela. Measurements of the cosmic background radiation. In B. F. Madore and R. B. Tully, editors,

Galaxy Distances and Deviations from Universal Expansion, pages 169–177. Reidel, Dordrecht, 1986.

[LVES85] P. Lubin, T. Villela, G. Epstein, and G. Smoot. A map of the cosmic background radiation at 3 millimeters. *Astrophysical Journal*, 298:L1–L5, 1985.

[Mac26] E. Mach. *The Principles of Physical Optics — An Historical and Philosophical Treatment*. E. P. Dutton and Company, New York, 1926. Reprinted by Dover, New York, in 1953.

[Mac60] E. Mach. *The Science of Mechanics — A Critical and Historical Account of Its Development*. Open Court, La Salle, 1960.

[Mac81] E. Mach. History and Root of the Principle of the Conservation of Energy. In I. B. Cohen, editor, *The Conservation of Energy and the Principle of Least Action*, New York, 1981. Arno Press. Reprint of 1911 English translation.

[Maj20] Q. Majorana. On gravitation — Theoretical and experimental researches. *Philosophical Magazine*, 39:488–504, 1920.

[Maj30] Q. Majorana. Quelques recherches sur l'absorption de la gravitation par la matière. *Journal de Physique et de Radium*, 1:314–324, 1930.

[Maj88a] Q. Majorana. On gravitation — Theoretical and experimental researches. In V. DeSabbata and V. N. Melnikov, editors, *Gravitational Measurements, Fundamental Metrology and Constants*, pages 523–539, Dordrecht, 1988. Kluwer.

[Maj88b] Q. Majorana. Quelques recherches sur l'absorption de la gravitation par la matière. In V. DeSabbata and V. N. Melnikov, editors, *Gravitational Measurements, Fundamental Metrology and Constants*, pages 508–522, Dordrecht, 1988. Kluwer.

[Mar86] R. de A. Martins. Pesquisa sobre absorção da gravidade. In Mast, editor, *Anais do I Seminário Nacional Sobre História da Ciência e da Tecnologia*, pages 198–213, Rio de Janeiro, 1986. Mast.

[Mar89] R. de A. Martins. Huygens e a gravitação newtoniana. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 1, Série 2:151–184, 1989.

[Mar93] R. de A. Martins. Huygens's reaction to Newton's gravitational theory. In J. V. Field and A. J. L. James, editors, *Renaissance and Revolution*, pages 203–213. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Max54] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism.* Dover, New York, 1954.

[Meh87] J. Mehra. Erwin Schrödinger and the rise of wave mechanics. II. The creation of wave mechanics. *Foundations of Physics*, 17:1141–1188, 1987.

[Mel90] F. A. Mella. *La Misura del Tempo nel Tempo.* Hoepli, Milano, 1990.

[MHT84] B. Mashhoon, F. H. Hehl, and D. S. Theiss. On the gravitational effects of rotating masses: the Thirring-Lense papers. *General Relativity and Gravitation*, 16:711–750, 1984.

[Mil81] A. I. Miller. *Albert Einstein's Special Theory of Relativity.* Addison-Wesley, Reading, 1981.

[Mol93] J. A. Molina. Observações sobre a concepção kantiana do espaço. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 3 (1/2), Série 3:117–132, 1993.

[Mon96] R. A. Monti. Theory of relativity: a critical analysis. *Physics Essays*, 9:238–260, 1996.

[MR87] J. Mehra and H. Rechenberg. *The Historical Development of Quantum Theory*, volume 5: Erwin Schrödinger and the Rise of Wave Mechanics. Part 2. Springer, New York, 1987.

[MR89] P. Marmet and G. Reber. Cosmic matter and the nonexpanding universe. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 17:264–269, 1989.

[NA95] M. C. D. Neves and A. K. T. Assis. The Compton effect as an explanation for the cosmological redshift. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, 36:279–280, 1995.

[Ner37] W. Nernst. Weitere prüfung der annahne eines stationären zustandes im weltall. *Zeitschrift fur Physik*, 106:633–661, 1937.

[Ner38] W. Nernst. Die strahlungstemperatur des universums. *Annalen der Physik*, 32:44–48, 1938.

[Ner95a] W. Nernst. Further investigation of the stationary universe hypothesis. *Apeiron*, 2:58–71, 1995.

[Ner95b] W. Nernst. The radiation temperature of the universe. *Apeiron*, 2:86–87, 1995.

[New34] I. Newton. *Mathematical Principles of Natural Philosophy.* University of California Press, Berkeley, 1934. Cajori edition.

[New90] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, volume 1. Nova Stella/Edusp, São Paulo, 1990. Tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia.

[New96] I. Newton. *Óptica.* Edusp, São Paulo, 1996. Tradução, introdução e notas de A. K. T. Assis.

[Nor65] J. D. North. *The Measure of the Universe — A History of Modern Cosmology.* Clarendon Press, Oxford, 1965.

[Nor95] J. D. Norton. Mach's principle before Einstein. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle - From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 9–57, Boston, 1995. Birkhäuser.

[Nus81] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica*, volume 1 - Mecânica. Edgard Blücher, São Paulo, 1981.

[Oli93] M. P. Oliveira. O éter luminoso como espaço absoluto. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 3 (1/2), Série 3:163–182, 1993.

[O'R65] A. O'Rahilly. *Electromagnetic Theory — A Critical Examination of Fundamentals*. Dover, New York, 1965.

[Pai82] A. Pais. *'Subtle is the Lord...' — The Science and the Life of Albert Einstein*. Oxford University Press, Oxford, 1982.

[Pfi95] H. Pfister. Dragging effects near rotating bodies and in cosmological models. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle - From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 315–331, Boston, 1995. Birkhäuser.

[Phi96] T. E. Phipps, Jr. Clock rates in a machian universe. *Toth-Maatian Review*, 13:5910–5917, 1996.

[Poi53] H. Poincaré. Les limites de la loi de Newton. *Bulletin Astronomique*, 17:121–269, 1953.

[Pop53] K. R. Popper. A note on Berkeley as precursor of Mach. *British Journal for the Philosophy of Science*, 4:26–36, 1953.

[PR94] F. M. Peixoto and M. A. F. Rosa. On Thirring's approach to Mach's principle: criticisms and speculations on extensions of his original work. In P. S. Letelier and W. A. Rodrigues Jr., editors, *Gravitation: The Spacetime Structure*, pages 172–178, Singapore, 1994. World Scientific. Proceedings of the 8th Latin American symposium on relativity and gravitation.

[PW65] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s. *Astrophysical Journal*, 142:419–421, 1965.

[Rai81] D. J. Raine. Mach's principle and space-time structure. *Reports on Progress in Physics*, 44:1151–1195, 1981.

[Reb77] G. Reber. Endless, boundless, stable universe. *University of Tasmania occasional paper*, 9:1–18, 1977.

[Reb86] G. Reber. Intergalactic plasma. *IEEE Transactions on Plasma Science*, PS-14:678–682, 1986.

[Rec83] E. Recami. A modified large number theory with constant G. *Foundations of Physics*, 13:341–346, 1983.

[Reg33] E. Regener. Der energiestrom der ultrastrahlung. *Zeitschrift fur Physik*, 80:666–669, 1933.

[Reg95] E. Regener. The energy flux of cosmic rays. *Apeiron*, 2:85–86, 1995.

[Rei14] H. Reissner. Über die relativität der beschleunigungen in der mechanik. *Physikalishe Zeitschrift*, 15:371–375, 1914.

[Rei15] H. Reissner. Über eine möglichkeit die gravitation als unmittelbare folge der relativität der trägheit abzuleiten. *Physikalishe Zeitschrift*, 16:179–185, 1915.

[Rei16] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Fedels nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 50:106–120, 1916.

[Rei73] M. Reinhardt. Mach's principle — A critical review. *Zeitschritte fur Naturforschung A*, 28:529–537, 1973.

[Rei95a] H. Reissner. On a possibility of deriving gravitation as a direct consequence of the relativity of inertia. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle - From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 143–146, Boston, 1995. Birkhäuser.

[Rei95b] H. Reissner. On the relativity of accelerations in mechanics. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle, From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 134–142, Boston, 1995. Birkhäuser.

[RFT82] V. C. Rubin, W. K. Ford, Jr., and N. Thonnard. Rotational properties of 23 Sb galaxies. *Astrophysical Journal*, 261:439–456, 1982.

[RL97] W. A. Rodrigues Jr. and J. Y. Lu. On the existence of undistorted progressive waves (UPWs) of arbitrary speeds $0 \leq v < \infty$ in nature. *Foundations of Physics*, 27:435–508, 1997.

[RO89] W. A. Rodrigues Jr. and E. C. de Oliveira. A comment on the twin paradox and the Hafele-Keating experiment. *Physics Letters A*, 140:479–484, 1989.

[Roe35] O. Roemer. The velocity of light. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 335–337, New York, 1935. McGraw-Hill.

[RR89] W. A. Rodrigues Jr. and M. A. F. Rosa. The meaning of time in the theory of relativity and Einstein's later view on the twin paradox. *Foundations of Physics*, 19:705–724, 1989.

[Rub83] V. C. Rubin. Dark matter in spiral galaxies. *Scientific American*, 248:88–101, 1983.

[San84] R. H. Sanders. Anti-gravity and galaxy rotation curves. *Astronomy and Astrophysics*, 136:L21–L23, 1984.

[San86] R. H. Sanders. Finite length-scale anti-gravity and observations of mass discrepancies in galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 154:135–144, 1986.

[San90] R. H. Sanders. Mass discrepancies in galaxies: dark matter and alternatives. *Astronomy and Astrophysics Review*, 2:1–28, 1990.

[Sar31] G. Sarton. Discovery of the aberration of light. *Isis*, 6:233–239, 1931.

[Sch25] E. Schrödinger. Die erfüllbarkeit der relativitätsforderung in der klassischen mechanik. *Annalen der Physik*, 77:325–336, 1925.

[Sch57] E. Schrödinger. *Expanding Universes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1957.

[Sch64] L. I. Schiff. Observational basis of Mach's principle. *Reviews of Modern Physics*, 36:510–511, 1964.

[Sch84] E. Schrödinger. *Collected Papers*, volume 2. Austrian Academy of Sciences, Vienna, 1984.

[Sch95] E. Schrödinger. The possibility of fulfillment of the relativity requirement in classical mechanics. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle - From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 147–158, Boston, 1995. Birkhäuser.

[Sci53] D. W. Sciama. On the origin of inertia. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 113:34–42, 1953.

[See17] H. Seeliger. Bemerkung zu P. Gerbers aufsatz: 'Die fortplanzungsgeschwindligkeit der gravitation'. *Annalen der Physik*, 53:31–32, 1917.

[She60] C. W. Sherwin et al. Search for the anisotropy of inertia using the Mössbauer effect in Fe^{57}. *Physical Review Letters*, 4:399–401, 1960.

[Soa92] D. S. L. Soares. An alternative view of flat rotation curves in spiral galaxies. *Revista Mexicana de Astronomia e Astrofisica*, 24:3–7, 1992.

[Soa94] D. S. L. Soares. An alternative view of flat rotation curves. II. The observations. *Revista Mexicana de Astronomia e Astrofisica*, 28:35–42, 1994.

[Sym82] K. R. Symon. *Mecânica*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 5^a edição, 1982. Tradução de G. B. Batista.

[Tat78] R. Taton (editor). *Roemer et la Vitesse de la Lumière*. J. Vrin, Paris, 1978.

[Thi18] H. Thirring. Über die wirkung rotierender ferner massen in der Einsteinschen gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 19:33–39, 1918.

[Thi21] H. Thirring. Berichtigung zu meiner arbeit: 'Über die wirkung rotierender ferner massen in der Einsteinschen gravitationstheorie'. *Physikalische Zeitschrift*, 22:29–30, 1921.

[Tho81] J. J. Thomson. On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies. *Philosophical Magazine*, 11:229–249, 1881.

[Tis72] M. F. Tisserand. Sur le mouvement des planètes autour du soleil, d'après la loi électrodynamique de Weber. *Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de Paris*, 75:760–763, 1872.

[Tol92] S. A. Tolchelnikova-Murri. A new way to determine the velocity of the solar system. *Galilean Electrodynamics*, 3:72–75, 1992.

[Tol93] S. A. Tolchelnikova-Murri. The Doppler observations of Venus contradict SRT. *Galilean Electrodynamics*, 4:3–6, 1993.

[Tri65] R. A. R. Tricker. *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*. Pergamon, New York, 1965.

[WE82] P. W. Worden and C. W. F. Everitt. Resource letter GI-1: gravity and inertia. *American Journal of Physics*, 50:494–500, 1982.

[Web46] W. Weber. Elektrodynamische maassbestimmungen über ein allgemeines grundgesetz der elektrischen wirkung. *Abhandlungen bei Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtstagfeier Leibnizen's herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft (Leipzig)*, pages 211–378, 1846.

Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke* (Springer, Berlin, 1893), vol. 3, pp. 25–214.

[Web48] W. Weber. Elektrodynamische maassbestimmungen. *Annalen der Physik*, 73:193–240, 1848.

[Web66] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* vol. 5, pages 489–529, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.

[Wes90] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part III. Mechanics, gravitation. *Foundations of Physics Letters*, 3:581–605, 1990.

[Wes91] J. P. Wesley. *Selected Topics in Advanced Fundamental Physics*. Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, 1991.

[Whi53] G. J. Whitrow. Berkeley's philosophy of motion. *British Journal for the Philosophy of Science*, 4:37–45, 1953.

[Whi73] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 1: *The Classical Theories.* Humanities Press, New York, 1973.

[Whi89] G. J. Whitrow. *Time in History.* Oxford University Press, Oxford, 1989.

[Wis81] M. N. Wise. German concepts of force, energy, and the electromagnetic ether: 1845–1880. In G. N. Canter and M. J. S. Hodge, editors, *Conceptions of Ether — Studies in the History of Ether Theories 1740–1900*, pages 269–307, Cambridge, 1981. Cambridge University Press.

[Woo68] A. E. Woodruff. The contributions of Hermann von Helmholtz to electrodynamics. *Isis*, 59:300–311, 1968.

[Woo76] A. E. Woodruff. Weber, Wilhelm Eduard. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography,* vol. 14, pages 203–209, New York, 1976. Scribner.

[XA94] A. L. Xavier Jr. and A. K. T. Assis. O cumprimento do postulado de relatividade na mecânica clássica - uma tradução comentada de um texto de Erwin Schrödinger sobre o princípio de Mach. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 12:3–18, 1994.

[YvdM68] W. Yourgrau and A. van der Merwe. Did Ernst Mach 'miss the target'? *Synthese*, 18:234–250, 1968.

[Zyl94] A. Zylbersztajn. Newton's absolute space, Mach's principle and the possible reality of fictitious forces. *European Journal of Physics*, 15:1–8, 1994.

Errata do livro Mecânica Relacional, A. K. T. Assis (Editora do Centro de Lógica e Epistemologia - CLE da Universidade Estadual de Campinas/FAPESP, Campinas, Brasil, 1998), ISBN: 85-86497-01-0

- Pág. 57, a equação (2.21) deve ser:

$$-qv_x B = -q\,|\,\theta_o\,|\,\ell\omega\, B \sin \omega t = m_i a_y$$

- Pág. 58, a equação (2.22) deve ser:

$$y = \frac{qB\,|\,\theta_o\,|\,\ell}{m_i}\left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - t\right)$$

- Pág. 72, a sétima linha de baixo para cima deve ser:

das variáveis nas nebulosas) que as nebulosas são sistemas estela-

- Pág. 78, a equação (3.11) deve ser:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{R_>^2}\left[\left(1 + \frac{3}{5}\eta + \eta\frac{\cos^2\theta}{5}\right)\hat{r} - \frac{6}{5}\eta \operatorname{sen}\theta \cos\theta\hat{\theta}\right]$$

- Pág. 82, a última linha deve ser:

$$\Omega = -\omega_d \cos(\pi/2 - \alpha) = -\omega_d \sin\alpha$$

- Pág. 106, a décima linha deve ser:

enquanto um corpo pequeno se move em relação a ela, do que dizer o

- Pág. 153, a segunda equação deve ser:

$$emf_{12} = -\frac{\mu_o}{4\pi} I_1 \oint_{C_1}\oint_{C_2} d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 \frac{d}{dt}\frac{1}{r_{12}} = \frac{\mu_o}{4\pi}\left(\vec{V}_1 - \vec{V}_2\right)\cdot \oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{\left(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2\right)\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}$$

- Pág. 179, a décima-segunda linha deve ser:

inerciais diferentes como "covariância," [Mil81], págs. 14, 240-241

- Pág. 182, a segunda equação deve ser:

$$\vec{F}_f = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - m(2\vec{\omega}\times\vec{v}) - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} - m\vec{a}_{o'o}\ .$$

- Pág. 254, a sexta linha deve ser:

frequência de vibração é inversamente proporcional à raiz quadrada da massa gravitacional do corpo

- Pág. 297, a quarta linha da seção 11.1 deve ser:

uma correspondência com Hooke em 1679-1680, [Coh80], Cap. 5 e